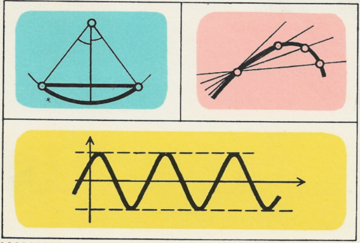
Lecciones populares de matemáticas

¿QUE ES EL CALCULO DIFERENCIAL?

V. G. Boltianski



Editorial MIR Moscú

ИЗДАТЕЛЬСТВО
МИР

ПОПУЛЯРНЫЕ ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИКЕ

В. Г. БОЛТЯНСКИЙ

ЧТО ТАКОЕ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЕ?

ИЗДАТЕЛЬСТВО
«НАУКА»

LECCIONES POPULARES DE MATEMATICAS

V. G. BOLTIANSKI

¿QUÉ ES EL CÁLCULO DIFERENCIAL?

TRADUCIDO DEL RUSO
POR EL INGENIERO ANTONIO MOLINA GARCIA

Tercera edición

EDITORIAL MIR
MOSCÚ

Primera edición 1974
Segunda edición 1981
Tercera edición 1984

На испанском языке

© Traducción al español. Editorial Mir. 1974

IMPRESO EN LA URSS.

INDICE

Prólogo

El problema de la caída de un cuerpo

Planteamiento del problema 7
Solución cualitativa del problema 10
Fórmula de la velocidad de caída de un cuerpo. Número *e* 15

Cálculo diferencial

Concepto de derivada 28
Ecuación diferencial 30
Dos problemas que conducen a ecuaciones diferenciales 31
Logaritmos naturales 37

Oscilaciones armónicas

El problema de las oscilaciones pequeñas de un péndulo 39
Ecuación diferencial de las oscilaciones armónicas 48
Circuito oscilante 52
Oscilaciones por la acción de la fuerza elástica de un resorte 54

Otras aplicaciones del concepto de derivada

Valores máximo y mínimo 59
El problema del trazado de la tangente 65
Simulación 68

Conclusión 69

PROLOGO

A los alumnos que cursan los últimos años de la enseñanza media, sobre todo a los que se interesan por las matemáticas, la física o la técnica, se les plantea con frecuencia la pregunta: ¿Qué son las matemáticas «superiores»? A veces cuestiones de este tipo se analizan en las reuniones de los círculos matemáticos de las escuelas.

El propósito del autor es explicar (de forma comprensible para dichos alumnos) ciertos conceptos de las matemáticas superiores*, como son los de derivada, ecuación diferencial, número e, logaritmo natural (lo corriente es que los alumnos se enteren de la existencia de estos dos últimos conceptos y se interesen por ellos). He procurado que las explicaciones de estos conceptos sean lo más claras posibles, basándome para ello en la resolución de problemas tomados de la física. Al proceder así, además del deseo de lograr la claridad antedicha, me ha guiado el de mostrar que los conceptos de las matemáticas «superiores» son el reflejo matemático de las propiedades de procesos reales que ocurren en la naturaleza y demostrar una vez más que las matemáticas están ligadas a la vida, y no al margen de ella, que se desarrollan, y no son una ciencia acabada o invariable.

No todas las demostraciones y razonamientos contenidos en el libro se hacen con absoluta rigurosidad matemática. Algunos de estos razonamientos tienen carácter de aclaraciones. Este método de exposición me ha parecido el más a propósito para un libro popular.

Esta obrita puede utilizarse en el trabajo de los círculos matemáticos y físicos de las escuelas e institutos de segunda enseñanza: para su comprensión bastan los conocimientos que se adquieren en los primeros nueve cursos de las escuelas de enseñanza media. Parte del material que figura en ella procede de un cursillo de conferencias que dio el autor a petición de los dirigentes de los círculos matemáticos escolares adjuntos a la Universidad de Moscú.

Aprovecho la ocasión para expresar mi sincero agradecimiento a A. I. Markushévich y A. Z. Rívkin por sus valiosos consejos y sus observaciones al texto original.

---

*) Algunos conceptos de las matemáticas superiores puede conocerlos el lector por otros libros de esta misma serie: A. I. Markushévich, «Superficies y logaritmos»; I. P. Natansón, «Suma de magnitudes infinitesimales». Estos libros serán publicados en español por la Editorial MIR durante los próximos años.

EL PROBLEMA DE LA CAIDA DE UN CUERPO

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

El primer problema que vamos a considerar consiste en *determinar la velocidad de un cuerpo que cae desde cierta altura sobre la tierra.*

Por el curso de física elemental sabemos que todo cuerpo que cae en el vacío verticalmente hacia abajo tiene al cabo de t segundos de empezar a caer la velocidad

$$v = v_0 + gt, \tag{1}$$

donde v_0 es la velocidad inicial de caída, y g es la aceleración de la gravedad.

Cuando el cuerpo cae en el aire (y no en el vacío) la fórmula (1) sigue siendo en ciertos casos aproximadamente válida; pero en otros puede conducir a errores graves. Por ejemplo, si el cuerpo cae desde una altura pequeña, la fórmula (1) es aplicable. Sin embargo, cuando el cuerpo cae desde una altura muy grande, la magnitud de la velocidad puede diferir considerablemente de la expresión (1). En 1945 el paracaidista V. G. Romaniuk efectuó un salto con retraso de la apertura del paracaídas en el que voló más de 12 000 metros en caída libre. Un cuerpo que cayese en el vacío desde una altura como ésta (sin velocidad inicial) alcanzaría junto a la tierra una velocidad de cerca de 500 m/s. En efecto, de la fórmula $s = \frac{gt^2}{2}$ se deduce que la duración de la caída (en el vacío) sería

$$t = \sqrt{\frac{2s}{g}} \approx \sqrt{\frac{2 \cdot 12\,000 \text{ m}}{9{,}8 \text{ m/s}^2}} \approx 49{,}5 \text{ s},$$

y aplicando (1) hallamos el valor de la velocidad:

$$v = gt \approx 9{,}8 \text{ m/s}^2 \cdot 49{,}5 \text{ s} \approx 485 \text{ m/s}.$$

(Podríamos haber empleado directamente la fórmula $v^2 = 2gs$). Sin embargo, se ha podido establecer que la velocidad de caída del paracaidista durante saltos de este tipo

alcanza 50—60 m/s y no aumenta más. De este modo, la fórmula (1) conduce en este caso a un resultado erróneo.

Otro ejemplo: un paracaídas está calculado de tal forma que, después de abrirse, el paracaidista llega a tierra con una velocidad de cerca de 6,5 m/s cualquiera que sea la altura desde la cual saltó.

Está claro que en este caso tampoco es aplicable la fórmula (1).

Todo esto nos lleva a la conclusión de que la velocidad de un cuerpo que cae en el aire *se aproxima con el tiempo a cierto valor determinado*. En otras palabras, al cabo de cierto tiempo de comenzar la caída el movimiento del cuerpo se hace uniforme y su aceleración, igual a cero. Esto significa que la resultante (suma) de todas las fuerzas que actúan sobre dicho cuerpo es nula.

Es fácil comprender por qué la fórmula (1) no sirve para calcular la velocidad de caída de un cuerpo en el aire. Esta fórmula se deduce partiendo de la suposición de que el cuerpo se mueve por la acción de una sola fuerza, concretamente *la fuerza de la gravedad*

$$P = mg. \qquad (2)$$

Pero ya hemos visto que cuando el cuerpo cae en el aire la resultante se hace (al cabo de cierto tiempo de comenzar el movimiento) igual a cero, es decir, la fuerza de la gravedad *P es equilibrada* por otra fuerza que no se tuvo en cuenta al deducir la fórmula (1). Esta fuerza equilibradora es *la fuerza de resistencia del aire*. Ella es precisamente la que no permite que el paracaidista caiga con demasiada rapidez; se comporta como si «sostuviera» al paracaidista.

¿Cómo se puede tener en cuenta la resistencia del aire? Vamos a suponer que no hace viento. Si un cuerpo se encuentra en reposo, la fuerza de resistencia del aire es nula. Cuanto mayor sea la rapidez con que comience a moverse el cuerpo, tanto más «difícil» le será cortar el aire, es decir, la fuerza de resistencia del aire crecerá. Esto se puede observar fácilmente, un día que no haga viento, moviéndonos cada vez más de prisa: al paso, corriendo, en bicicleta ... Vamos a suponer que por su magnitud esta fuerza *es proporcional a la velocidad*, o sea, igual a bv, donde v es la velocidad del movimiento y b, un coeficiente de proporcionalidad. Esta suposición queda bien justificada en los experimentos

a velocidades no muy grandes*), es decir, no mayores que 1—2 m/s. La magnitud b depende de las dimensiones y de la forma del cuerpo. Por ejemplo, a una misma velocidad, la fuerza de resistencia del aire será aproximadamente 20 veces mayor para una esfera que para un cuerpo fusiforme de la misma sección transversal (fig. 1).

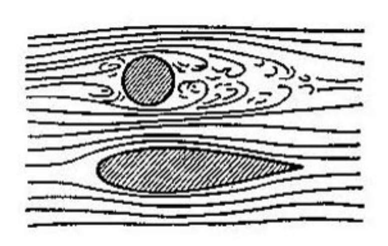


FIG. 1

Limitémonos a estas breves indicaciones y admitamos en adelante que la fuerza de resistencia del aire (que designaremos por S) tiene el valor

$$S = -bv; \tag{3}$$

el signo menos significa que esta fuerza está dirigida en sentido contrario al de la velocidad.

Así pues, vamos a considerar que sobre un cuerpo lanzado hacia abajo con cierta velocidad inicial actúan únicamente dos fuerzas: la de la gravedad P y la de resistencia del aire S. Basándonos en la segunda ley de Newton podemos escribir:

$$ma = P + S, \tag{4}$$

donde m es la masa del cuerpo y a, su aceleración. Como sentido positivo sobre la recta vertical resulta cómodo tomar

*) Advertimos que cuando las velocidades son mayores que 1— 2 m/s, la magnitud de la fuerza de resistencia del aire se hace mayor que bv. Se considera a veces que esta fuerza es proporcional al *cuadrado* de la velocidad.

no el hacia arriba, sino el *hacia abajo*, puesto que la velocidad del cuerpo que cae tiene esta dirección y con nuestro convenio será una magnitud positiva. La fuerza de la gravedad, que está dirigida hacia abajo, también será positiva. En cambio, la fuerza de resistencia del aire estará dirigida en sentido contrario al de la velocidad, es decir, hacia arriba, y, por lo tanto, será negativa. De este modo, sustituyendo en la fórmula (4) P y S por sus valores (2) y (3), obtenemos que

$$ma = mg - bv,$$

o bien

$$a = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{mg}{b}\right); \qquad (5)$$

es natural que la aceleración debe considerarse positiva si está dirigida hacia abajo y negativa en el caso contrario.

La ecuación (5) relaciona la aceleración y la velocidad del movimiento del cuerpo, que aún desconocemos. Partiendo de esta ecuación debemos determinar de qué modo varía la velocidad del movimiento del cuerpo al transcurrir el tiempo.

SOLUCION CUALITATIVA DEL PROBLEMA

Como resultado de los razonamientos que hemos expuesto anteriormente se obtuvo *la ecuación* (5) de la velocidad de un cuerpo que cae. Ahora tenemos que *resolver* esta ecuación. Por esto, los razonamientos que siguen tienen un carácter puramente matemático, aunque para mayor claridad seguiremos refiriéndonos en ellos a la velocidad de caída del cuerpo.

La ecuación (5) relaciona dos magnitudes desconocidas: la velocidad y la aceleración. Dándole a la aceleración un valor arbitrario podemos hallar por medio de la ecuación (5) el valor correspondiente de la velocidad. Por esta razón parece a primera vista que la ecuación (5) *no basta* para determinar las *dos* magnitudes v y a.

Sin embargo, esta opinión es errónea. La aceleración del movimiento del cuerpo queda completamente determinada conociendo cómo varía la velocidad al transcurrir el tiempo. De este modo, en la ecuación (5) no figuran dos magnitudes, a y v, absolutamente arbitrarias, sino *ligadas* entre sí. Esto da la posibilidad de *resolver* dicha ecuación. El análisis de la relación entre la velocidad y la aceleración nos conducirá más adelante al concepto de derivada.

Vamos a mostrar dos propiedades de la velocidad que se deducen de la ecuación (5); estas dos propiedades nos dan una idea absolutamente clara del carácter de la caída del cuerpo (teniendo en cuenta las suposiciones hechas). Más adelante obtendremos también una fórmula exacta de la velocidad.

Propiedad 1. *Si en el instante inicial la velocidad de caída* v_0 *fuera menor que* $\frac{mg}{b}$, *durante todo el tiempo que dure el movimiento será* $v \leqslant \frac{mg}{b}$. *En cambio, si* $v_0 > \frac{mg}{b}$, *durante todo el tiempo será* $v \geqslant \frac{mg}{b}$.

Supongamos lo contrario. Sea, por ejemplo, $v_0 < \frac{mg}{b}$ y admitamos que en cierto instante t_1 (es decir, al cabo de t_1 segundos de comenzar la caída) la velocidad llega a ser mayor que $\frac{mg}{b}$. En este caso, en algún instante intermedio (y hasta puede ser que en más de uno) la velocidad sería *igual* a $\frac{mg}{b}$. Supongamos que t_0 es el *último* instante (durante los primeros t_1 segundos) en que la velocidad fue igual a $\frac{mg}{b}$, de manera que en el intervalo de tiempo entre t_0 y t_1 conserva su validez la desigualdad $v > \frac{mg}{b}$. De acuerdo con la fórmula (5) se deduce de aquí que la aceleración a fue *negativa* durante todo este intervalo de tiempo. Pero esto está en contradicción con el hecho de que durante el intervalo considerado la velocidad varió desde el valor $\frac{mg}{b}$ hasta otro *mayor*. La contradicción obtenida demuestra que la velocidad no puede alcanzar un valor mayor que $\frac{mg}{b}$.

De manera análoga se considera el caso en que $v_0 > \frac{mg}{b}$.

Propiedad 2. *Si* $v_0 < \frac{mg}{b}$, *la velocidad de caída aumenta con el tiempo y se aproxima cada vez más al valor* $\frac{mg}{b}$; *pero si* $v_0 > \frac{mg}{b}$, *la velocidad de caída disminuye durante todo el tiempo y se aproxima también al valor* $\frac{mg}{b}$.

En efecto, si, por ejemplo, $v_0 > \frac{mg}{b}$, como ya sabemos por la propiedad 1, en todo el tiempo que dure el movimiento será $v \geqslant \frac{mg}{b}$. De la fórmula (5) se deduce que la aceleración será negativa y, por consiguiente, que la velocidad de caída será cada vez menor.

Demostremos que con el tiempo la diferencia $v - \frac{mg}{b}$ se hace menor que cualquier magnitud pequeña h elegida previamente (que se puede tomar, por ejemplo, igual a 0,001 m/s). Para esto consideraremos el instante

$$t^* = \frac{\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) m}{hb}.$$

Durante el tiempo transcurrido desde el comienzo del movimiento hasta el instante t^* la velocidad de caída disminuyó desde el valor v_0 hasta un valor menor que $\frac{mg}{b}$, es decir, su disminución no fue mayor que $v_0 - \frac{mg}{b}$. Por lo tanto, la aceleración media fue negativa y, por su magnitud absoluta, no mayor que

$$\frac{v_0 - \frac{mg}{b}}{t^*} = \frac{hb}{m}.$$

De aquí se deduce que en un determinado instante intermedio el valor de la aceleración no fue mayor que $\frac{hb}{m}$, puesto que si durante todo este intervalo de tiempo el valor de la acele-

ración hubiera sido mayor que $\frac{hb}{m}$ su valor medio, también habría sido mayor que $\frac{hb}{m}$.

Supongamos, pues, que en el instante t' tenemos:

$$|a| < \frac{hb}{m}.$$

De aquí, de acuerdo con (5), obtenemos:

$$\left| v - \frac{mg}{b} \right| = \frac{m}{b} \cdot |a| \leqslant \frac{m}{b} \cdot \frac{hb}{m} = h,$$

es decir, en el instante t' la velocidad difiere de $\frac{mg}{b}$ en una cantidad menor que h. Esto también será justo para todos los instantes siguientes, ya que la velocidad v disminuye conservándose mayor que $\frac{mg}{b}$.

Advertimos que de este modo hemos demostrado una proposición algo más exacta que la propiedad 2, es decir, que *no más tarde de*

$$t^* = \left| v^0 - \frac{mg}{b} \right| \cdot \frac{m}{hb} s \qquad (6)$$

comenzar la caída la velocidad diferirá de $\frac{mg}{b}$ *en una cantidad menor que* h.

Las propiedades 1 y 2 dan en cierto sentido solución al problema planteado. Pese a que no hemos obtenido una fórmula exacta de la velocidad, conocemos ya las leyes *cualitativas* de su variación, es decir, *cómo* varía al transcurrir el tiempo.

Analicemos, por ejemplo, el movimiento del paracaidista. Si éste abre el paracaídas inmediatamente después de saltar, su velocidad de caída, que al principio es nula, aumentará, pero su valor nunca será mayor que $\frac{mg}{b}$. La magnitud mg (peso del paracaidista con el paracaídas) es conocida, y b depende del diámetro de la cúpula del último. Esto da la posibilidad de *calcular* las dimensiones del paracaídas necesarias para que la velocidad máxima posible

de caída del paracaidista, igual a $\frac{mg}{b}$, no sea peligrosa para él al llegar a tierra. Pero si el paracaidista al saltar retrasa la apertura del paracaídas, mientras éste no se abra, el coeficiente de la expresión de la fuerza de resistencia del aire —que llamaremos b' en este caso— tendrá otro valor, menor que cuando desciende con el paracaídas abierto. Por esto la velocidad máxima posible de caída, $\frac{mg}{b'}$, será en este caso mayor que la velocidad $\frac{mg}{b}$ correspondiente al descenso con el paracaídas abierto. Por consiguiente, en el salto con retraso de la apertura, antes de ésta la velocidad de caída será mayor que $\frac{mg}{b}$ y, de acuerdo con la propiedad 1, después de aquélla la velocidad disminuirá y se aproximará a $\frac{mg}{b}$, permaneciendo durante todo el tiempo mayor que $\frac{mg}{b}$. De esta forma, cierto tiempo después de abrirse el paracaídas, también en este caso estará exenta de peligro la toma de tierra.

A continuación damos un ejemplo numérico para ilustrar lo antedicho.

Ejemplo 1. Supongamos que un paracaídas está calculado de tal forma que la velocidad de caída del paracaidista, con él abierto, se aproxime al valor límite de 6 m/s, es decir, $\frac{mg}{b} = 6$ m/s. Se nos plantea el problema siguiente: el paracaidista, que ha retrasado la apertura del paracaídas, lo abre cuando cae con una velocidad de 50 m/s. ¿Al cabo de cuánto tiempo será igual a 10 m/s su velocidad de caída, es decir, diferirá del valor límite $\frac{mg}{b} = 6$ m/s en menos que $h = 4$ m/s?

Solución. De la igualdad $\frac{mg}{b} = 6$ m/s obtenemos:

$$\frac{m}{b} = \frac{mg}{b} \cdot \frac{1}{g} \approx \frac{6 \text{ m/s}}{10 \text{ m/s}^2} = 0{,}6 \text{ s}.$$

Después, por la fórmula (6) deducimos que la velocidad de caída diferirá del valor límite $\frac{mg}{b} = 6$ m/s en $h = 4$ m/s

al cabo de un período de tiempo no mayor de $\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) \times$ $\times \frac{m}{b} \cdot \frac{1}{h}$ segundos, es decir, teniendo en cuenta nuestras suposiciones, al cabo de

$$(50\ \text{m/s} - 6\ \text{m/s})\,0{,}6\ \text{s} \cdot \frac{1}{4\ \text{m/s}} = 6{,}6\ \text{s}.$$

FORMULA DE LA VELOCIDAD DE CAIDA DE UN CUERPO. NUMERO *E*

Las propiedades 1 y 2 muestran cómo variará con el tiempo la velocidad de caída del cuerpo. En este párrafo obtendremos la fórmula exacta para esta velocidad de caída. En la expresión de la velocidad figura cierto número cuyo valor con cinco cifras decimales es 2,71828... Este número, que se encuentra con frecuencia en los problemas de matemáticas «superiores», se designa con la letra *e* (de forma semejante a como el número, también frecuente, 3,14159.., que expresa la razón de la longitud de la circunferencia a su diámetro, se designa con la letra π). Por qué figura en la fórmula de la velocidad este número $e = 2{,}71828...$ y cómo fue determinado exactamente son cosas que explicaremos más adelante, pero aquí daremos a conocer (sin deducirla por ahora) la fórmula de la velocidad de caída de un cuerpo y examinaremos algunos ejemplos que aclaran la aplicación de esta fórmula.

Sea v_0 *la velocidad inicial de caída de un cuerpo, y* v_t *su velocidad en el instante* t (es decir, al cabo de t segundos de haber comenzado la caída). *En este caso tenemos que*

$$v_t = \frac{mg}{b} + \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) e^{-\frac{b}{m}t}. \qquad (7)$$

Esta es la solución exacta de la ecuación (5); la demostración de la fórmula (7) se dará más adelante. Veamos ahora algunos ejemplos.

Ejemplo 2. Demostremos que de la fórmula (7) se deducen inmediatamente las leyes cualitativas de variación de la velocidad (propiedades 1 y 2) obtenidas anteriormente.

En efecto, el número $e^{-\frac{b}{m}}$, que resulta de elevar el número e a una potencia negativa, es positivo y menor que la unidad, es decir, $0 < e^{-\frac{b}{m}} < 1$. Al aumentar t disminuye el exponente de $e^{-\frac{b}{m}t} = (e^{-\frac{b}{m}})^t$ (pudiendo hacerse tan pequeño como se desee para valores de t suficientemente grandes). Por esto de la fórmula (7) se deduce claramente que, por ejemplo, cuando $v_0 > \frac{mg}{b}$, la velocidad v_t es siempre mayor que el valor $\frac{mg}{b}$ (puesto que $v_0 - \frac{mg}{b} > 0$), disminuye con el tiempo y se aproxima a $\frac{mg}{b}$.

Ejemplo 3. Calculemos, aplicando la fórmula (7), el valor de la velocidad de caída de un paracaidista al cabo de 6,6 s de abrir el paracaídas en un salto con apertura retrasada; se toman los mismos valores numéricos que en el ejemplo 1 (pág. 14), es decir, $\frac{mg}{b} = 6$ m/s, $v_0 = 50$ m/s. (Vimos entonces que la velocidad debe ser menor que 10 m/s.)

Solución. Tenemos:

$$\frac{b}{m} = g : \frac{mg}{b} \approx 10 \text{ m/s}^2 : 6 \text{ m/s} = \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{\text{s}}.$$

Luego, utilizando las tablas de logaritmos (el logaritmo decimal del número e es aproximadamente igual a 0,4343), hallamos fácilmente que

$$\lg (e^{-\frac{b}{m}t}) = -\frac{b}{m} t \lg e \approx$$

$$\approx -\frac{5}{3} \cdot 6{,}6 \cdot 0{,}4343 = -4{,}7773 = -5 + 0{,}2227 = \bar{5}{,}2227,$$

de donde

$$e^{-\frac{b}{m}t} \approx 0{,}0000167.$$

Sustituyendo este valor en la fórmula (7), obtenemos: $v_{6,6\text{ s}} \approx 6 \text{ m/s} + (50 \text{ m/s} - 6 \text{ m/s})\, 0{,}0000167 \approx 6{,}000735$ m/s.

Con la misma facilidad se puede calcular, aplicando la fórmula (7), que la velocidad de caída del paracaidista será igual a 10 m/s (en las mismas condiciones) al cabo de $t = \frac{3 \lg 11 \text{ s}}{5 \lg e} \approx 1{,}44$ s de haberse abierto el paracaídas*).

De este modo, *al abrir el paracaídas en un salto con retraso de la apertura, la velocidad de caída disminuye en el transcurso de* 1—2 *segundos desde* 50—60 m/s *hasta casi la velocidad normal de descenso*, 6—7 m/s, *con el paracaídas abierto*. En este caso el paracaidista se mueve con gran retardo, es decir, sufre una gran fuerza por la parte del paracaídas (tirón hacia arriba), sobre el cual actúa principalmente la fuerza de resistencia del aire. El que haya presenciado saltos con retraso de apertura (en las fiestas de aviación, por ejemplo) habrá visto cómo la velocidad del cuerpo, que cae rápidamente, disminuye bruscamente en el instante en que se abre el paracaídas; da la sensación de que de repente se detiene en el aire durante unos segundos.

Ejemplo 4. Supongamos que la velocidad de caída de un paracaidista durante un salto con retraso de apertura se aproxima al valor límite de $\frac{mg}{b} = 50$ m/s. La velocidad inicial de caída v_0 se toma igual a cero. ¿Qué error cometeremos si, en vez de la fórmula (7), utilizamos la (1), que se aplica a la caída de un cuerpo en el vacío?

Solución. Tenemos

$$-\frac{b}{m} = -\frac{g}{\frac{mg}{b}} \approx -\frac{10 \text{ m/s}^2}{50 \text{ m/s}} = -0{,}2\frac{1}{\text{s}}.$$

Así, pues, según la fórmula (7) la velocidad de caída del paracaidista tendrá el valor

$$v_t = 50\,(1 - e^{-0{,}2t}).$$

---

*) En realidad la velocidad de caída se aproximará con más rapidez aún al valor límite de 6 m/s, porque la expresión (3) de la fuerza de resistencia del aire sólo se cumple bien cuando las velocidades de caída son pequeñas. Si estas velocidades son grandes, la magnitud de dicha fuerza aumenta con *mayor rapidez* que bv.

De (1) obtenemos el siguiente valor de la velocidad de caída del cuerpo en el vacío

$$v_t = gt \approx 10t.$$

Por lo tanto, la razón de estas velocidades tiene la forma

$$\frac{50\,(1-e^{-0,2t})}{gt} \approx \frac{5}{t}\,(1-e^{-0,2t}).$$

Suponiendo $t = 1$ s, obtenemos para esta razón (después de unos fáciles cálculos utilizando las tablas de logaritmos) el valor $\approx 0{,}91$, y si $t = 2$ s, el valor $\approx 0{,}82$. Vemos, pues, que *ya durante los primeros segundos de caída, y debido a la existencia de la fuerza de resistencia del aire, la velocidad se diferencia muy sensiblemente de la magnitud gt.*

Pasemos a la demostración*) de la fórmula (7). Para esto procuraremos primeramente explicar la relación que existe entre la velocidad y la aceleración. Si v_t es la velocidad a que se mueve un cuerpo en un instante t y v_{t+h} es su velocidad h segundos después de dicho instante (o sea, en el instante $t+h$), la relación $\frac{v_{t+h}-v_t}{h}$ se llama *aceleración media* del cuerpo en el intervalo de tiempo h y se designa por a_m:

$$a_m = \frac{v_{t+h}-v_t}{h}.$$

Si h es muy pequeña (por ejemplo, 0,01 s o aún menor, según el carácter que tenga el movimiento del cuerpo), durante un período de tiempo tan corto la aceleración varía poco, de manera que a_m diferirá poco del valor de la aceleración a_t en el instante t. La diferencia entre a_t y a_m será tanto menor cuanto menor sea h. Dicho en otras palabras, si para h se toman valores cada vez más pequeños (por ejemplo, 0,1 s; 0,01 s; 0,001 s, etc.), sin variar t, la magnitud a_m variará aproximándose cada vez más a a_t. Este hecho se expresa matemáticamente así:

$$a_t = \lim_{h\to 0} a_m = \lim_{h\to 0} \frac{v_{t+h}-v_t}{h}.$$

*) Si esta demostración les parece difícil de comprender, el lector puede pasarla por alto sin que esto perjudique el entendimiento de lo que después sigue.

La abreviatura lím significa *límite* de la expresión que se escribe a continuación de élla (es decir, de la expresión de a_m), y el símbolo $h \to 0$ que figura debajo indica que se trata del límite de la magnitud a_m cuando h tiende a cero.

Hemos obtenido así la relación que expresa la dependencia de la aceleración respecto de la velocidad. Demostremos ahora otras tres propiedades de la velocidad del movimiento que consideramos. Estas propiedades pueden servirnos para demostrar la fórmula (7).

Propiedad 3. *Si la velocidad y la aceleración de un cuerpo en movimiento satisfacen la relación (5), el valor v_0 de la velocidad inicial determina unívocamente la ulterior variación de la velocidad.*

Supongamos lo contrario. Sean dos cuerpos T y T^*, con los mismos valores de m y b, que se mueven de tal forma que sus velocidades y aceleraciones satisfacen la relación (5) y supongamos que en un instante $t = 0$ estos dos cuerpos tenían la misma velocidad inicial v_0 y que al cabo de t_1 segundos sus velocidades resultaron ser distintas, por ejemplo, la velocidad v_1 del primer cuerpo resultó ser mayor que la v_1^* del segundo. Para concretar supongamos también que $v_0 > \frac{mg}{b}$ (en el caso de la desigualdad inversa la demostración es análoga). Sea t_0 el último instante (durante los primeros t_1 segundos) en que las velocidades de ambos cuerpos eran iguales. En este caso, en el intervalo de tiempo comprendido entre t_0 y t_1 la velocidad v del primer cuerpo debería ser mayor que la v^* del segundo, es decir, $v > v^*$. De aquí se deduce que

$$v - \frac{mg}{b} > v^* - \frac{mg}{b},$$

siendo ambas magnitudes $v - \frac{mg}{b}$ y $v^* - \frac{mg}{b}$ positivas, de manera que $v_0 > \frac{mg}{b}$ (véase la propiedad 1). De las desigualdades

$$v - \frac{mg}{b} > v^* - \frac{mg}{b} > 0,$$

y basándonos en la fórmula (5), deducimos que las aceleraciones a y a^* de los dos cuerpos lanzados son negativas, con

la particularidad de que, por su magnitud, la aceleración a es mayor que la a^*. Pero esto significa que durante el intervalo de tiempo comprendido entre t_0 y t_1 las velocidades de los cuerpos T y T^* disminuyeron, habiendo disminuido la velocidad del cuerpo T en una magnitud *mayor* que la del T^*, es decir, en el instante t_1 la velocidad v deberá ser *menor* que v^* (puesto que en el instante t_0 las velocidades de los cuerpos eran iguales). Pero nosotros supusimos lo contrario. Esta contradicción demuestra que la propiedad 3 es justa.

Propiedad 4. *Si dos cuerpos iguales* T y T^* comienzan a caer al mismo tiempo con las velocidades iniciales v_0 y v^*, en cualquier instante t sus velocidades v_t y v_t^* satisfarán la relación*

$$\frac{v_t^* - \frac{mg}{b}}{v_t - \frac{mg}{b}} = \frac{v_0^* - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}. \qquad (8)$$

Para demostrarlo consideremos un cuerpo imaginario $\widetilde{T}$ que se mueve de modo que en el instante t su velocidad es igual a

$$\widetilde{v}_t = qv_t + (1 - q)\frac{mg}{b},$$

donde

$$q = \frac{v_0^* - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}.$$

Demostremos que la velocidad y la aceleración de este cuerpo imaginario satisfarán la relación (5). Hallamos la aceleración media $\widetilde{a}_m$ del movimiento de dicho cuerpo durante el período de tiempo comprendido entre los instantes t y $t + h$. Tenemos

$$\widetilde{a}_m = \frac{\widetilde{v}_{t+h} - \widetilde{v}_t}{h} = \frac{\left[qv_{t+h} + (1-q)\frac{mg}{b}\right] - \left[qv_t + (1-q)\frac{mg}{b}\right]}{h} =$$

$$= q\frac{v_{t+h} - v_t}{h} = q \cdot a_m,$$

*) En el sentido de que tienen iguales las magnitudes m y b.

donde a_m es la aceleración media del cuerpo T durante este mismo período de tiempo. Si en la relación $\widetilde{a}_m = q \cdot a_m$ se toma h cada vez menor, $\widetilde{a}_m$ se aproximará a la aceleración $\widetilde{a}_t$ del movimiento del cuerpo imaginario en el instante t, y a_m, a la aceleración a_t del cuerpo T en el mismo instante. De este modo obtenemos que $\widetilde{a}_t = qa_t$ (para un instante arbitrario t), y la relación (5(nos da

$$\widetilde{a} = qa = -q\frac{b}{m}\left(v - \frac{mg}{b}\right) =$$

$$= -\frac{b}{m}\left[qv + (1-q)\frac{mg}{b} - \frac{mg}{b}\right] = -\frac{b}{m}\left(\widetilde{v} - \frac{mg}{b}\right),$$

es decir, para el movimiento del cuerpo imaginario se cumple la relación (5).

La velocidad inicial del cuerpo imaginario $\widetilde{T}$ es igual a

$$\widetilde{v}_0 = qv_0 + (1-q)\frac{mg}{b} =$$

$$= q\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) + \frac{mg}{b} =$$

$$= \frac{v_0^* - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}} \cdot \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) + \frac{mg}{b} = v_0^*.$$

Por lo tanto, los cuerpos $\widetilde{T}$ y T^* tienen la misma velocidad inicial y los dos se mueven de manera que sus velocidades y aceleraciones satisfacen la ecuación (5). De aquí, en virtud de la propiedad 3, se deduce que las velocidades v_t^* y $\widetilde{v}_t$ de estos movimientos coinciden en cualquier instante t, es decir,

$$v_t^* = qv_t + (1-q)\frac{mg}{b}.$$

De este modo obtenemos que

$$\frac{v_t^* - \frac{mg}{b}}{v_t - \frac{mg}{b}} = \frac{\left[q v_t + (1-q) \frac{mg}{b} \right] - \frac{mg}{b}}{v_t - \frac{mg}{b}} =$$

$$= \frac{q\left(v_t - \frac{mg}{b}\right)}{v_t - \frac{mg}{b}} = q = \frac{v_0^* - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}},$$

con lo que la propiedad 4 queda demostrada.

Propiedad 5. *Para dos instantes cualesquiera t y τ es válida la relación*

$$\frac{v_{t+\tau} - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}} = \frac{v_t - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}} \cdot \frac{v_\tau - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}}, \tag{9}$$

donde v_0, v_τ, v_t, $v_{t+\tau}$ son las velocidades de caída del cuerpo T en los instantes 0, τ, t, $t + \tau$.

En efecto, comencemos a observar la caída del cuerpo T desde el instante τ. Al cabo de t segundos de dicho instante (es decir, $t + \tau$ segundos después de empezar el movimiento) la velocidad de caída será igual a $v_{t+\tau}$. Esto quiere decir, que si en el instante $t = 0$, además del cuerpo considerado T, lanzamos un segundo cuerpo T^*, cuya velocidad inicial v_0^* sea igual a v_τ, en el instante t la velocidad v_t^* de este segundo cuerpo será igual a $v_{t+\tau}$, es decir, $v_t^* = v_{t+\tau}$. De este modo, de (8) obtenemos que

$$\frac{v_{t+\tau} - \frac{mg}{b}}{v_t - \frac{mg}{b}} = \frac{v_\tau - \frac{mg}{b}}{v_0 - \frac{mg}{b}},$$

o bien

$$\left(v_{t+\tau} - \frac{mg}{b}\right)\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) =$$

$$= \left(v_t - \frac{mg}{b}\right)\left(v_\tau - \frac{mg}{b}\right).$$

Dividiendo los dos miembros de esta igualdad por $\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)^2$ obtenemos la relación (9) que buscábamos.

Una vez establecida la fórmula (9) pasamos al cálculo exacto del valor de la velocidad v_t. Para evitar el empleo de fórmulas voluminosas, introduciremos temporalmente el símbolo

$$u_t=\frac{v_t-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}},$$

Entonces la fórmula (9) toma la forma, más simple,

$$u_{t+\tau}=u_t\cdot u_\tau. \qquad (10)$$

Cuando $\tau=t$ la fórmula (10) da:

$$u_{2t}=(u_t)^2.$$

Exactamente del mismo modo, si suponemos $\tau=2t$ obtenemos de (10) que

$$u_{3t}=u_t\cdot u_{2t}=u_t\cdot(u_t)^2=(u_t)^3,$$

y si $\tau=3t$ tendremos que

$$u_{4t}=u_t\cdot u_{3t}=u_t\cdot(u_t)^3=(u_t)^4,$$

etc. Continuando de esta forma nos convencemos de que para un número entero y positivo cualquiera n se cumplirá la relación

$$u_{nt}=(u_t)^n. \qquad (11)$$

Suponiendo en esta igualdad que $t=\frac{p}{n}$ s y extrayendo la raíz n-ésima, obtendremos

$$(u_p)^{\frac{1}{n}}=u_{\frac{p}{n}}.$$

Haciendo luego $t=1$ s en la igualdad (11) y sustituyendo n por p, hallamos que

$$u_p=(u_1)^p.$$

De las dos últimas igualdades se deduce la relación

$$u_{\frac{p}{n}}=(u_1)^{\frac{p}{n}}.$$

Por lo tanto, si t es un número racional positivo cualquiera (es decir, un múmero de la forma $\frac{p}{n}$, donde p y n son números enteros positivos),

$$u_t=(u_1)^t,$$

o volviendo a las designaciones iniciales,

$$\frac{v_t-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}=\left(\frac{v_1-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}\right)^t; \qquad (12)$$

aquí v_1 es la velocidad de caída en el instante $t=1$ s.

Del hecho de que la relación (12) es justa para los valores racionales de t se deduce su validez para todos los valores de t.

Tomemos, por ejemplo, el instante $t=\sqrt{2}$ s $=1{,}414\ldots$ s. Como los números 1,4; 1,41; 1,414, etc., son racionales, para todos estos valores de t será justa la relación (12)

$$\frac{v_{1,4}-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}=\left(\frac{v_1-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}\right)^{1,4};$$

$$\frac{v_{1,41}-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}=\left(\frac{v_1-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}\right)^{1,41}; \ldots \qquad (13)$$

Si para t tomamos valores racionales que sean cada vez aproximaciones más exactas al número $\sqrt{2}$ (por ejemplo, 1,4; 1,41; 1,414; 1,4142, etc.), los primeros miembros de la igualdad (13) se aproximarán al límite $\frac{v_{\sqrt{2}}-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}$, y los segundos miembros, al límite $\left(\frac{v_1-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}\right)^{\sqrt{2}}$.

De este modo, en el límite obtenemos que

$$\frac{v_{\sqrt{2}}-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}=\left(\frac{v_1-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}\right)^{\sqrt{2}}.$$

Semejante razonamiento puede aplicarse, como es natural, no sólo a $\sqrt{2}$, sino a cualquier valor irracional de t. Por lo tanto, la relación 12) es válida para cualquier valor de t.

Haciendo

$$\frac{v_1-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}=c,$$

de (12) obtenemos

$$\frac{v_t-\frac{mg}{b}}{v_0-\frac{mg}{b}}=c^t,$$

de donde hallamos

$$v_t=\frac{mg}{b}+\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)c^t. \tag{14}$$

Esta fórmula de la velocidad de caída no es aún definitiva, puesto que desconocemos el número c que figura en ella. Para calcular este número c hallamos, partiendo de la fórmula (14), la aceleración del cuerpo en el instante inicial del movimiento. La aceleración media durante los primeros h segundos de caída tiene, de acuerdo con (14), el valor siguiente:

$$a_m=\frac{v_h-0}{h}=\frac{\frac{mg}{b}+\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)c^h-v_0}{h}=$$

$$=\left(v_0-\frac{mg}{b}\right)\cdot\frac{c^h-1}{h}.$$

Cuando h tiende a cero esta expresión nos da la acelera-

ción a_0 en el instante inicial:

$$a_0 = \lim_{h \to 0} a_m = \lim_{h \to 0} \left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) \cdot \frac{c^h - 1}{h}. \qquad (15)$$

Si designamos $c^h - 1$ por x, obtenemos:

$$c^h - 1 = x, \ c^h = 1 + x, \ h = \log_c (1 + x).$$

De esta forma, en vez de la expresión $\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) \cdot \frac{c^h - 1}{h}$ que figura en (15) detrás del signo de lím, obtenemos la expresión

$$\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right) \cdot \frac{x}{\log_c (1+x)} = \frac{v_0 - \frac{mg}{b}}{\frac{1}{x} \log_c (1+x)} = \frac{v_0 - \frac{mg}{b}}{\log_c (1+x)^{1/x}}.$$

Advertimos que cuando el número h tiende a cero, el número c^h tiene por límite la unidad, y el número $x = c^h - 1$ tiende a cero. Por lo tanto podemos escribir:

$$a_0 = \lim_{x \to 0} \frac{v_0 - \frac{mg}{b}}{\log_c (1+x)^{\frac{1}{x}}}. \qquad (16)$$

El límite de la expresión $(1 + x)^{1/x}$ *cuando el número* x *tiende a cero se llama número* e. No vamos a *demostrar* que existe dicho límite, es decir, que la expresión $(1 + x)^{1/x}$ se aproxima realmente a un valor determinado cuando $x \to 0$. La demostración (y además elemental) de la existencia de este límite puede encontrarse en los primeros capítulos de cualquier curso de matemáticas superiores. Nosotros nos limitaremos a calcular el valor de la expresión $(1 + x)^{1/x}$ cuando $x = 0{,}1$; $x = 0{,}01$; $x = 0{,}001$; $x = 0{,}0001$. Los resultados se dan a continuación (los cálculos pueden hacerse valiéndose de tablas de logaritmos, preferible de siete cifras; también puede utilizarse la fórmula del binomio de Newton):

$$(1 + 0{,}1)^{\frac{1}{0{,}1}} = 1{,}1^{10} \approx 2{,}59374,$$

$$(1 + 0{,}01)^{\frac{1}{0{,}01}} = 1{,}01^{100} \approx 2{,}70481,$$

$$(1+0{,}001)^{\frac{1}{0{,}001}} = 1{,}001^{1000} \approx 2{,}71692,$$

$$(1+0{,}0001)^{\frac{1}{0{,}0001}} = 1{,}0001^{10000} \approx 2{,}71814.$$

Estos cálculos demuestran con suficiente claridad que cuando $x \to 0$ la expresión $(1+x)^{1/x}$ posee el límite $e = 2{,}71\ldots$ Partiendo de (16) obtenemos ahora

$$a_0 = \frac{v_0 - \frac{mg}{b}}{\log_c e}.$$

Por otra parte, de (5), tenemos que

$$a_0 = -\frac{b}{m}\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right).$$

Igualando las expresiones de a_0 obtenidas hallamos que

$$\frac{v_0 - \frac{mg}{b}}{\log_c e} = -\frac{b}{m}\left(v_0 - \frac{mg}{b}\right),$$

de donde

$$\log_c e = -\frac{m}{b}; \quad e = c^{-\frac{m}{b}}; \quad c = e^{-\frac{b}{m}}.$$

Finalmente, sustituyendo en la fórmula (14) c por su valor $e^{-\frac{b}{m}}$, obtenemos la fórmula (7), que es lo que se quería demostrar.

CONCEPTO DE DERIVADA

Así, pues, la ecuación (5) permite una solución completamente exacta. Esta ecuación liga la magnitud v (velocidad de caída) con la magnitud a, que indica la *rapidez con que varía la magnitud* v (la aceleración es «la rapidez con que varía la velocidad»).

Cuando hablamos de la rapidez con que varía una magnitud, suponemos que no se trata de una magnitud constante, caracterizada por un número, sino de una magnitud *variable*, es decir, de una magnitud cuyo valor cambia con el tiempo. Ejemplos de magnitudes de este tipo (dependientes del tiempo) son: la velocidad y la aceleración del movimiento variado, la intensidad de la corriente alterna, etc.

Sea y una magnitud cuyo valor cambia con el tiempo. Llamemos y_t al valor que esta magnitud toma al cabo de t segundos de comenzar el proceso que se analiza. La diferencia $y_{t+h} - y_t$ muestra cuánto varió la magnitud y durante h segundos (entre los instantes t y $t+h$ segundos después de comenzar el movimiento). En cambio, la relación

$$\frac{y_{t+h}-y_t}{h} \qquad (17)$$

muestra en qué magnitud cambió, por término medio, y durante cada segundo (en el transcurso de este intervalo de tiempo), es decir, esta relación es *la rapidez media de variación de la variable* y. Eligiendo h cada vez menor, obtenemos el valor de la rapidez media de variación durante un período de tiempo cada vez más pequeño, comenzando desde el instante t. En el límite (cuando h tiende a cero) la relación (17) da *la rapidez de variación de la magnitud* y en el instante t. Ya sabemos que esta rapidez de variación se representa matemáticamente en la forma

$$\lim_{h\to 0}\frac{y_{t+h}-y_t}{h}\,. \qquad (18)$$

La expresión (18) se llama *derivada* de la magnitud y respecto del tiempo t; como hemos visto, esta expresión da la rapidez con que varía la variable y. Se puede considerar

una variable que no cambie con el tiempo, sino que dependa de cualquier otra magnitud. Por ejemplo, el área del círculo depende de su radio; llamando S_R al área de un círculo de radio R, obtenemos:

$$S_R = \pi R^2. \tag{19}$$

Estudiando la dependencia que existe entre el área del círculo y su radio llegamos a la relación $\frac{S_{R+h}-S_R}{h}$, que expresa la rapidez media de variación del área al cambiar el radio. El límite de esta relación (cuando $h \to 0$) es la derivada de la magnitud S respecto de R.

El concepto de derivada es uno de los fundamentales de las matemáticas superiores. Si una variable y cambia en dependencia de las variaciones de una magnitud x (o, como suele decirse, es función de x), la derivada de y respecto de x se designa con el símbolo y' o, más frecuentemente, con uno de los símbolos $\frac{dy}{dx}$ o $\frac{d}{dx}\,y$:

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{h \to 0} \frac{y_{x+h}-y_x}{h};$$

aquí no se puede eliminar la letra d, ya que no es un factor, sino que simboliza *la operación de la toma de la derivada* o, como también se dice, la operación *de derivación.*

Calculemos, por ejemplo, la derivada $\frac{dS}{dR}$ de la función (19):

$$\frac{dS}{dR} = \lim_{h \to 0} \frac{S_{R+h}-S_R}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{\pi (R+h)^2 - \pi R^2}{h} =$$
$$= \lim_{h \to 0} (2\pi R + \pi h) = 2\pi R,$$

es decir, la derivada del área de un círculo respecto del radio es igual a la longitud de su circunferencia.

Como ejemplo también calcularemos la derivada $\frac{ds}{dt}$ del camino recorrido respecto del tiempo. Llamemos s_t al camino recorrido por un determinado cuerpo en un instante t (es decir, al cabo de t segundos de haber comenzado a moverse).

En este caso la relación $\frac{s_{t+h}-s_t}{h}$ es la velocidad media durante el intervalo de tiempo comprendido entre los instantes t y $t+h$, y el límite de esta relación cuando $h \to 0$ es el valor de la velocidad en el instante t:

$$v_t = \lim_{h\to 0} \frac{s_{t+h}-s_t}{h} = \frac{ds}{dt}.$$

De un modo análogo se calcula la derivada $\frac{dv}{dt}$. La relación

$$\frac{v_{t+h}-v_t}{h}$$

es la aceleración media durante el intervalo de tiempo comprendido entre los instantes t y $t+h$, y el límite de esta relación es el valor de la aceleración en el instante t (compárese con lo dicho en la pág. 18):

$$a_t = \lim_{h\to 0} \frac{v_{t+h}-v_t}{h} = \frac{dv}{dt}.$$

Las relaciones que hemos demostrado

$$v = \frac{ds}{dt} \tag{20}$$

y

$$a = \frac{dv}{dt} \tag{21}$$

desempeñan un papel extraordinario en la mecánica.

ECUACION DIFERENCIAL

Retornemos a la ecuación (5). De acuerdo con (21) esta ecuación se puede escribir de la forma

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{b}{m}\left(v - \frac{mg}{b}\right). \tag{22}$$

Ahora está claro que ésta es una ecuación con una sola incógnita, v, pero no es una ecuación *algebraica*, sino una ecuación que relaciona la magnitud v con su derivada. Las

ecuaciones de este tipo se llaman *diferenciales*. Comparando la ecuación diferencial (22) con su solución (7) y designando $\frac{b}{m}$ por k y $\frac{mg}{b}$ por c, podemos enunciar el teorema siguiente.

Teorema. *La solución de la ecuación diferencial*

$$\frac{dv}{dt} = -k(v-c) \tag{23}$$

es la expresión

$$v = c + (v_0 - c)e^{-kt}, \tag{24}$$

donde v_0 *es el valor inicial* (es decir, cuando $t = 0$) *de la magnitud* v.

En adelante, aplicando este teorema, podremos calcular también otros fenómenos físicos.

DOS PROBLEMAS QUE CONDUCEN A ECUACIONES DIFERENCIALES

a) ***Conexión de la corriente.*** Consideremos un circuito eléctrico compuesto por una bobina y una pila (fig. 2). Las propiedades eléctricas de la bobina son bastante complicadas, pero en una serie de casos pueden ser caracterizadas con alto grado de exactitud por dos magnitudes: *la resistencia* de la bobina y su *inductancia*. Precisamente por esto las bobinas se representan como formadas por dos partes conectadas en serie: una resistencia y una inductancia (fig. 3). La caída de tensión debida a la resistencia es proporcional a la intensidad de la corriente i que pasa por la bobina (ley de Ohm):

$$V = Ri;$$

el coeficiente de proporcionalidad R se llama *resistencia* de la bobina. La caída de tensión debida a la inductancia es proporcional a *la rapidez de variación de la intensidad de la corriente*. Llamando w a esta rapidez (que se mide en amperios por segundo) y L al coeficiente de proporcionalidad, obtenemos para la caída de tensión la expresión

$$V = Lw.$$

La magnitud L se llama *inductancia* de la bobina. La caída de tensión en la bobina se compone de las caídas de tensión debidas a la resistencia y a la inductancia, es decir, se expresa por la fórmula

$$V = Lw + Ri. \tag{25}$$

La fórmula (25) se ve bien confirmada en los experimentos (si la frecuencia de la corriente que pasa por la bobina no es

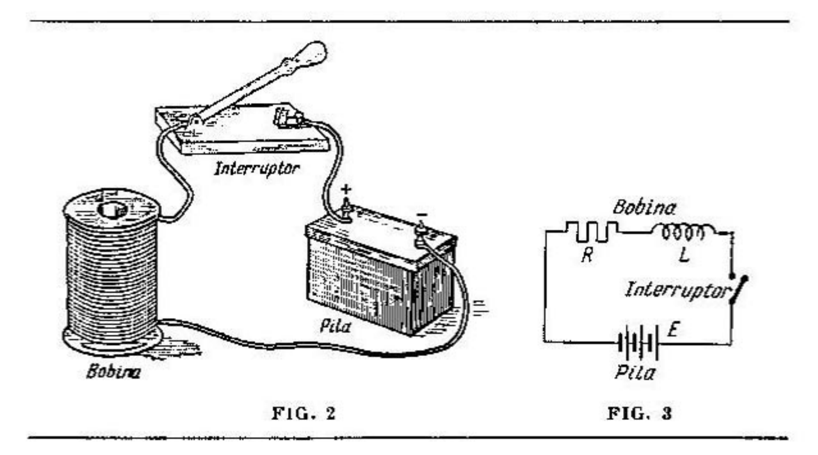


FIG. 2 FIG. 3

muy grande). Nosotros vamos a aplicarla. Designemos por E la fuerza electromotriz (f.e.m.) de la pila. Igualando la f.e.m. de la pila a la caída de tensión en la bobina, y basándonos en la segunda ley de Kirchhoff (y despreciando la resistencia interna de la pila y la de los hilos conductores), obtenemos la ecuación

$$E = Lw + Ri$$

o bien

$$w = -\frac{R}{L}\left(i - \frac{E}{R}\right). \tag{26}$$

La solución de esta ecuación se obtiene sin dificultad aplicando el teorema enunciado en la pág. 31. En efecto,

llamando i_t a la intensidad de la corriente en el instante t, podemos decir que la magnitud

$$w_m = \frac{i_{t+h} - i_t}{h}$$

es la rapidez media de variación de la intensidad de la corriente durante el intervalo comprendido entre los instantes t y $t + h$. Cuando $h \to 0$ obtenemos la rapidez de variación de la intensidad de la corriente en el instante t:

$$w = \lim_{h \to 0} \frac{i_{t+h} - i_t}{h} = \frac{di}{dt}.$$

Por lo tanto, la magnitud w es la derivada de la intensidad de la corriente i, y la ecuación (26) puede escribirse de la forma

$$\frac{di}{dt} = -\frac{R}{L}\left(i - \frac{E}{R}\right).$$

Esta ecuación sólo difiere de la (23) en que la variable incógnita no se designa por v, sino por i, lo que, naturalmente, carece de importancia. En este caso las constantes k y c que figuran en la ecuación (23) toman los valores

$$k = \frac{R}{L} \text{ y } c = \frac{E}{R}.$$

De este modo, la solución de la ecuación diferencial que hemos escrito tendrá la forma (véase (24)):

$$i_t = \frac{E}{R} + \left(i_0 - \frac{E}{R}\right) e^{-\frac{R}{L}t}.$$

Si en el instante de conectar la pila (cuando $t = 0$) la intensidad de la corriente i_0 es igual a cero, obtenemos la fórmula más simple

$$i_t = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-\frac{R}{L}t}\right).$$

De esta fórmula se deduce que la intensidad de la corriente, que es nula en el instante de conectar, aumenta durante todo

el tiempo y se aproxima al valor $\frac{E}{R}$, es decir, al valor de la intensidad de la corriente que pasaría por la bobina si ésta tuviera la misma resistencia R pero careciera de inductancia.

b) ***Desintegración radiactiva.*** Supóngase que tenemos un trozo de roca que contiene cierta cantidad de materia radiactiva. Los átomos de la materia radiactiva pueden desintegrarse convirtiéndose en otra sustancia química—*producto de desintegración*. De esta forma, con el tiempo disminuye la cantidad de materia radiactiva que hay en el trozo de roca. Introduzcamos el concepto de *rapidez de desintegración*. Supongamos que en cierto instante t la cantidad de materia radiactiva contenida en la roca era de $m_t g$ y que al cabo de h años disminuyó (debido a la desintegración) y se hizo igual a m_{t+h} g. La expresión

$$\frac{m_{t+h}-m_t}{h}$$

muestra en cuántos gramos, por término medio, disminuyó la masa de materia radiactiva anualmente (durante el período de tiempo considerado); es natural que esta expresión se llame *rapidez media de desintegración* durante el intervalo de tiempo que se considera. El límite a que tenderá el valor de la velocidad media cuando $h \to 0$ es la rapidez de desintegración en el instante t. Llamémosla u:

$$u = \lim_{h \to 0} \frac{m_{t+h}-m_t}{h} = \frac{dm}{dt}.$$

Advertimos que la rapidez de desintegración es *negativa*, ya que la masa de materia radiactiva disminuye con el tiempo.

¿De qué depende la rapidez de desintegración? Si la cantidad de materia radiactiva que hay en la roca es pequeña, se puede considerar que *la rapidez de desintegración es directamente proporcional a la cantidad de materia radiactiva que hay en el trozo de roca en el instante dado*, es decir, se cumple la relación

$$u = -km,$$

donde m es la masa existente de materia radiactiva, y k es una magnitud constante positiva (coeficiente de proporcionalidad).

La validez aproximada de esta ley se puede fundamentar considerando que la desintegración de unos átomos no influye en el estado de los demás átomos de la materia radiactiva. Con esta condición se puede considerar que de cada gramo de materia radiactiva se desintegra siempre, aproximadamente, la misma cantidad por unidad de tiempo, por ejemplo, k g, independientemente de la cantidad de dicha materia que queda aún en la roca. En este caso, de m g se desintegrarán por unidad de tiempo km g de materia radiactiva.

¿Se puede acaso considerar que la desintegración no influye en el estado de los átomos radiactivos restantes? Porque las partículas del átomo que se desintegra pueden incidir en otro átomo de materia radiactiva y provocar su desintegración, lo que daría lugar a que se desintegrarán después otros átomos y así sucesivamente. Semejante *reacción en cadena* (en un proceso de este tipo se basa, por ejemplo, la acción de la bomba atómica) contradeciría la independencia de la desintegración de los átomos. Para que no pueda producirse una cadena de desintegraciones sucesivas es necesario que las partículas emitidas en la desintegración se pierdan sin alcanzar (en la mayoría de los casos) a otros átomos radiactivos. Esto ocurrirá si la cantidad de materia radiactiva que hay en el trozo de roca sólo constituye un pequeño porcentaje de él, mientras que su masa fundamental no es radiactiva. Entonces la inmensa mayoría de las partículas emitidas durante la desintegración se pierde, incidiendo sobre los átomos no radiactivos de la roca, y la reacción en cadena es imposible. Por esto, cuando la cantidad de materia radiactiva que hay en la roca es pequeña, se puede considerar aproximadamente que la desintegración de los átomos tiene carácter independiente.

De este modo, para determinar la masa de materia radiactiva no desintegrada obtenemos la ecuación diferencial

$$\frac{dm}{dt} = -km,$$

que difiere de la ecuación (23) en que la magnitud incógnita se designa por la letra m, en vez de por la v, y la constante c, en este caso, es nula. Por lo tanto, de acuerdo con (24) la

solución tendrá la forma

$$m_t = m_0 e^{-kt}, \tag{27}$$

donde m_0 es la masa de materia radiactiva en el instante inicial (es decir, cuando empezamos a interesarnos por el proceso de desintegración).

Ejemplo 5. ¿Al cabo de cuántos años la cantidad de materia radiactiva se reduce a la mitad?

Solución. Para responder a esta pregunta hay que determinar t partiendo de la ecuación

$$m_0 e^{-kt} = \frac{1}{2} m_0.$$

Después de eliminar m_0 y de tomar logaritmos, hallamos:

$$t = \frac{1}{k} \log_e 2 \approx \frac{0,69}{k}.$$

Esto lapso de tiempo se llama *período de semidesintegración* o *semiperíodo* de la materia radiactiva dada. Admitamos que este espacio de tiempo no depende de *cuánta* materia radiactiva se toma, sino únicamente de k, es decir, de *qué* materia radiactiva se toma. Por ejemplo, el período de semidesintegración del radio es igual a 1590 años, y el semiperíodo radiactivo del uranio 238 de cerca de 4,5 millares de millones de años.

Ejemplo 6. La fórmula (27) da la posibilidad de hacer algunas deducciones sobre *la edad de la Tierra.*

Supongamos que en un trozo de roca extraído de las entrañas de la Tierra hay, además de impurezas, m g de materia radiactiva y p g de su producto de desintegración. Supongamos también que de cada gramo de esta materia radiactiva se obtiene (una vez desintegrado) r g de producto de desintegración. Esto significa que los p g de dicho producto proceden de $\frac{p}{r}$ g de materia radiactiva. De este modo, si consideramos que en cierto instante comenzó el proceso de desintegración en el trozo de roca que nos interesa (es decir, había en él solamente materia radiactiva sin un solo átomo de producto de desintegración), tendremos que la

masa inicial de materia radiactiva sería igual a $m+\frac{p}{r}$. Para determinar el tiempo transcurrido desde este instante imaginario (de comienzo de la desintegración) hasta nuestros días, de acuerdo con (27), hay que resolver con respecto a t la ecuación

$$m=\left(m+\frac{p}{r}\right)e^{-kt},$$

de donde obtenemos que

$$t=\frac{1}{k}\log_e\left(1+\frac{p}{rm}\right).$$

Cálculos de este tipo relativos a ciertas rocas existentes en la Tierra dan para t un valor aproximadamente igual del orden de $2\cdot10^9$ años. Por lo tanto, *las condiciones en que pudo originarse normalmente en la Tierra el proceso de desintegración datan varios millares de millones de años.* Es posible que hace millares de millones de años la materia que ahora constituye la Tierra se hallase en unas condiciones completamente distintas, en las cuales se creaban, de átomos más simples y de otras partículas, átomos radiactivos.

El problema del origen de la Tierra es objeto del estudio de la ciencia astronómica llamada *cosmogonía.* Mucho de lo que se sabe sobre este problema fue aclarado por primera vez gracias a las profundas investigaciones llevadas a cabo por el académico O. Yu. Schmidt y otros científicos soviéticos*.

LOGARITMOS NATURALES

En las fórmulas para la resolución de los problemas que hemos planteado figura una función exponencial cuya base es e. Si los cálculos se hacen valiéndose de tablas de logaritmos pueden evitarse ciertas operaciones tomando *logarit-*

*) Véase Otto Yu. Schmidt, «Cuatro conferencias sobre el origen de la Tierra», Editorial Academia de Ciencias de la URSS, 1950).

mos de base e. Así, aplicando logaritmos de base e y de base 10 a la fórmula (27), obtenemos:

$$\log_e m_t = -kt + \log_e m_0,$$
$$\log m_t = -kt \log e + \log m_0.$$

En el segundo caso hay que tomar un logaritmo más y hacer una multiplicación más que en el primer caso. Además hay problemas que conducen a fórmulas en las cuales figuran logaritmos de base e, como vimos en los ejemplos 5 y 6. El número e aparece también con frecuencia en otros problemas de matemáticas y la utilización de los logaritmos de base e resulta ser muy cómoda, sobre todo en problemas teóricos. *Los logaritmos de base e se llaman naturales* (o *neperianos*) *y se designan con el símbolo* ln: la expresión $\ln x$ equivale a $\log_e x$. Entre los logaritmos decimales y naturales existe la relación

$$\log_{10} x = M \cdot \ln x,$$

donde

$$M = \log_{10} e \approx 0{,}4343.$$

Esta relación se obtiene sin dificultad aplicando los logaritmos de base 10 a la identidad

$$e^{\ln x} = x.$$

EL PROBLEMA DE LAS OSCILACIONES PEQUEÑAS DE UN PÉNDULO

Supongamos que en un punto C está sujeto un hilo de longitud l, de cuyo extremo pende un cuerpo M (péndulo). El problema consiste en averiguar cómo se moverá el cuerpo M. Para resolver matemáticamente este problema haremos algunas simplificaciones. En primer lugar consideraremos que el hilo que sostiene al péndulo M es *inextensible* y *carece de peso*.

Analicemos el movimiento del péndulo M en un plano vertical que pase por el punto de suspensión. El hecho de que el hilo sea inextensible nos permite afirmar que el cuerpo M se moverá describiendo una circunferencia de radio l con centro en el punto C. La suposición de que el hilo carece de peso significa que el peso del hilo es insignificante en comparación con el del cuerpo M; esto permite considerar que las fuerzas exteriores actúan solamente sobre dicho cuerpo. El péndulo M puede considerarse como un punto pesado (es decir, que tiene cierta masa m, pero que se prescinde de sus dimensiones). De las fuerzas que actúan sobre el cuerpo M tendremos en cuenta, además de la tensión del hilo, la fuerza de gravedad. La fuerza de resistencia del aire se puede despreciar al resolver este problema (por ejemplo, se puede suponer que el péndulo se encuentra en un recipiente cerrado del cual se ha extraído el aire; de la diferencia que existe entre el movimiento del péndulo en el aire y en el vacío se trata en la nota de la pág. 56).

Supongamos que el cuerpo M se encuentra en cierto instante en un punto A de la circunferencia que describe. El punto inferior de esta circunferencia lo designaremos por Q, la longitud del arco QA, por s, y la magnitud (en radianes) del ángulo central $\angle QCA$ correspondiente a este arco (fig. 4), por α. Entonces

$$s = l\alpha. \tag{28}$$

En este caso consideraremos positivos el arco s y el ángulo α si el punto A se encuentra a la derecha del Q, y negativo en el caso contrario.

Pasemos a deducir la ecuación a partir de la cual hallaremos la ley del movimiento del péndulo. El punto A se

encuentra más alto que el Q. La diferencia entre las alturas de dichos puntos viene dada por el segmento $h = QB$ que es igual a

$$h = CQ - CB = l - l\cos\alpha = l(1-\cos\alpha) = l\cdot 2\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}.$$

Por esto, considerando que cuando el péndulo se encuentra

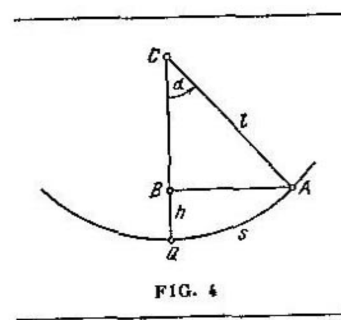


FIG. 4

en la posición Q su energía potencial es nula, hallamos que si está en el punto A el valor de dicha energía será

$$W^{(p)} = mgh = mg\cdot 2l\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}.$$

La energía cinética del péndulo tiene el valor

$$W^{(c)} = \frac{mv^2}{2},$$

donde v es la velocidad a que se mueve el cuerpo M. Por lo tanto, la energía total E del péndulo (cuando se encuentra en el punto A) se expresa por la fórmula

$$E = \frac{mv^2}{2} + 2mgl\,\mathrm{sen}^2\frac{\alpha}{2}. \qquad (29)$$

Como el péndulo al moverse no realiza ningún trabajo (puesto que hemos despreciado las fuerzas de rozamiento y de resistencia del aire), su energía se conserva siempre igual, es decir, la magnitud de E es constante.

Vamos a simplificar un poco la ecuación (29). En efecto, nos ocuparemos únicamente del problema de *las oscilaciones pequeñas del péndulo*, es decir, de aquel movimiento del péndulo en que éste se desvía de la posición de equilibrio Q a ángulos pequeños. Expliquemos qué se debe entender por «ángulos pequeños». La cuestión está en que es imposible escribir la solución de la ecuación (29) mediante operaciones conocidas. Por ésto se plantea la pregunta: ¿no es posible sustituir la ecuación (29) por otra más simple? Está claro que esta simplificación debe ser tal, que la solución de la ecuación simplificada sea al mismo tiempo una solución con alto grado de exactitud de la ecuación (29). Advertimos que con esta simplificación no introducimos ninguna inexactitud *esencial*, porque la relación (29) ya es aproximada*, de manera que la cuestión de la validez de una u otra simplificación depende únicamente del grado de aproximación a la realidad que necesitamos obtener.

La simplificación que ordinariamente se hace en la ecuación (29) consiste en que sen φ se sustituye simplemente por φ. El hecho de que cuando los ángulos φ son *pequeños* pueda tolerarse esta sustitución se deduce de la fig. 5, en la cual se representa el arco $A'Q'B'$ de una circunferencia de radio $C'Q' = 1$; a ambos lados del radio $C'Q'$ se ha tomado un ángulo φ. La longitud del segmento $A'B'$ es igual a 2 sen φ (puesto que $A'S'$ es la línea del seno), y la longitud del arco $A'B'$ es igual a 2φ (midiendo los ángulos, claro está, en radianes). Pero como se ve claramente en la figura, cuando los ángulos φ son pequeños estas magnitudes difieren poco una de otra, y la diferencia será tanto menor cuanto menor sea φ. Por ejemplo, es fácil comprobar por medio de tablas

---

*) Al deducir la ecuación (29) admitimos una serie de simplificaciones: despreciamos la fuerza de resistencia del aire, el peso del hilo, las dimensiones del cuerpo M, etc.

Advertimos que, en general, toda ley física, toda relación matemática entre magnitudes físicas (por ejemplo, las relaciones (1), (2), (3), (4), (5), (25), (29)) es aproximada, ya que en realidad siempre existen «fuerzas» que no se tuvieron en cuenta al deducir la ley física o la relación matemática. Todo lo cual no merma, naturalmente, la enorme importancia de las leyes físicas. Por ejemplo, la ley de Ohm o la segunda ley de Newton se cumplen en condiciones normales con un grado de exactitud enorme.

de funciones trigonométricas que si los ángulos no exceden de 0,245 radianes (es decir, $\approx 14°$) la relación $\frac{sen\,\varphi}{\varphi}$ difiere de 1 en menos de 0,01; y si los ángulos son menores que 1° (0,017 radianes), esta relación difiere de la unidad en menos de 0,0005.

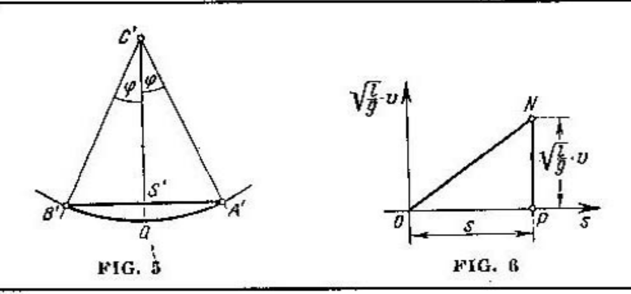


FIG. 5 FIG. 6

Así, pues, considerando que las desviaciones (elongaciones) del péndulo son pequeñas, sustituimos sen $\frac{\alpha}{2}$ por $\frac{\alpha}{2}$, es decir, sustituimos la ecuación (29) por otra nueva que «difiere poco» de la primera:

$$\frac{mv^2}{2} + 2mgl\left(\frac{\alpha}{2}\right)^2 = E.$$

Teniendo en cuenta (28) podemos escribir esta relación en la forma

$$\frac{mv^2}{2} + \frac{mgs^2}{2l} = E,$$

o bien

$$\frac{l}{g}v^2 + s^2 = \frac{2lE}{mg}. \qquad (30)$$

En esta ecuación figuran dos variables incógnitas: s y v (las constantes g, l, m, E se consideran conocidas). Sin embargo, esta ecuación (lo mismo que la (5)) puede resolverse, ya que las magnitudes s y v no son arbitrarias, sino

que están ligadas por la relación (20). De (20) se deduce que la ecuación (30) se puede escribir en la forma

$$\frac{l}{g}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2+s^2=\frac{2lE}{mg}. \qquad (31)$$

de manera que es efectivamente una ecuación con *una* sola incógnita. Pasemos a resolverla.

Elijamos un sistema de coordenadas en el plano y tomemos sobre su eje de abscisas la magnitud s y sobre su eje de ordenadas la magnitud $\sqrt{\frac{l}{g}}\,v$. En cualquier instante t, al cuerpo M corresponden unos determinados valores del camino recorrido s y de la velocidad v, es decir, un determinado punto N en el plano (fig. 6). Y al contrario, sabiendo dónde se encuentra el punto N podemos hallar sus coordenadas s y $\sqrt{\frac{l}{g}}\,v$, o sea, podemos conocer la posición en que se encuentra el péndulo y su velocidad. Así, pues, en cada instante t el péndulo M se representa convencionalmente por cierto punto N. La longitud del segmento ON se calcula fácilmente por el teorema de Pitágoras:

$$ON=\sqrt{PN^2+OP^2}=\sqrt{\frac{l}{g}v^2+s^2},$$

es decir, (en virtud de la relación (30)),

$$ON=\sqrt{\frac{2lE}{mg}}.$$

Al moverse el péndulo variarán las magnitudes s y v, es decir, el punto N se moverá en el plano en que se tomó el sistema de coordenadas. Pero la distancia a dicho punto desde el origen de coordenadas será siempre la misma, a sea, será igual a $\sqrt{\frac{2lE}{mg}}$. De este modo, el punto N se moverá siguiendo una circunferencia de radio

$$R=\sqrt{\frac{2lE}{mg}}. \qquad (32)$$

Esta circunferencia se llama *circunferencia de fases.*

Hallemos la velocidad con que se mueve el punto N siguiendo la circunferencia. Esta velocidad tiene dirección tangencial a la circunferencia; supongamos, por ejemplo, que se representa por el vector NA (fig. 7). Descompongamos este vector en una componente horizontal y otra vertical.

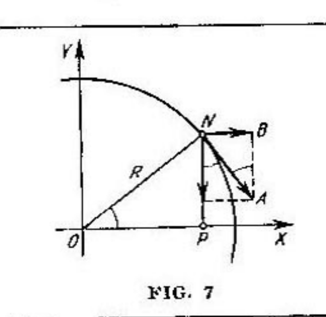


FIG. 7

En este caso la componente horizontal NB representará la velocidad de traslación del punto P por el eje de abscisas. Y como la distancia al punto P desde O es igual a s, la velocidad del punto P será igual a $\frac{ds}{dt} = v$, es decir, $NB = v$. Ahora, partiendo de la semejanza de los triángulos ONP y NAB tenemos:

$$PN : ON = NB : NA \quad \text{ó} \quad \sqrt{\frac{l}{g}}\, v : R = v : NA.$$

De la última proporción hallamos que

$$NA = R\sqrt{\frac{g}{l}}\,.$$

Esta es la velocidad del punto N por la circunferencia.

Llamemos s_0 y v_0 respectivamente a la elongación y a la velocidad del péndulo en el instante inicial, y N_0 al punto correspondiente de la circunferencia de fases. Entonces el radio de esta circunferencia tendrá el valor siguiente:

$$R = \sqrt{\frac{l}{g} v_0^2 + s_0^2} \tag{33}$$

(véase (30) y (32)) y el ángulo $\varphi_0 = \angle XON_0$ vendrá determinado por la relación

$$\operatorname{tg} \varphi_0 = \frac{\sqrt{\frac{l}{g}} \cdot v_0}{s_0} \tag{34}$$

(fig. 8). Después, al cabo de t segundos de comenzar a moverse el péndulo, el punto N, que se mueve con la velocidad

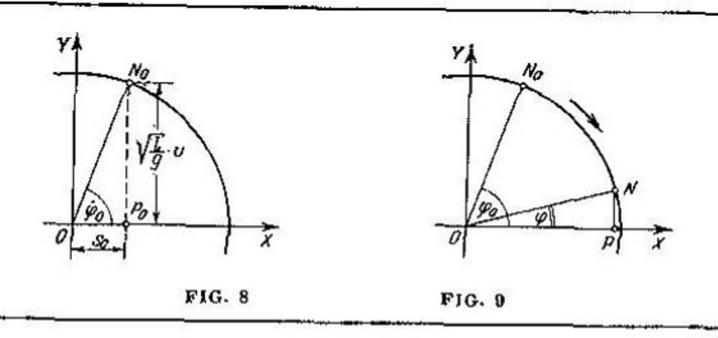


FIG. 8 FIG. 9

$R \sqrt{\frac{g}{l}}$, habrá recorrido por la circunferencia de fases la distancia $N_0N = R\sqrt{\frac{g}{l}}\, t$ y, por lo tanto, el ángulo $\angle N_0ON$ será igual a $\sqrt{\frac{g}{l}}\, t$. De este modo (fig. 9),

$$\varphi = \angle XON = \angle XON_0 - \angle N_0ON = \varphi_0 - \sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

De aquí obtenemos:

$$OP = R\cos\varphi = R\cos\left(\varphi_0 - \sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right) = R\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t - \varphi_0\right),$$

$$PN = R\operatorname{sen}\varphi = R\operatorname{sen}\left(\varphi_0 - \sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right) =$$

$$= -R\operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t - \varphi_0\right).$$

Finalmente, recordando que $OP = s$ y $PN = \sqrt{\frac{l}{g}}\,v$, obtenemos de aquí que

$$\left.\begin{aligned} s &= R\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - \varphi_0\right), \\ v &= -\sqrt{\frac{g}{l}}\,R\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - \varphi_0\right). \end{aligned}\right\} \qquad (35)$$

Estas fórmulas expresan la elongación y la velocidad del péndulo al cabo de t segundos de haber comenzado su movimiento, es decir, resuelven completamente el problema del movimiento del péndulo (con las simplificaciones hechas). Veamos unos cuantos ejemplos.

Ejemplo 7. En el instante inicial el péndulo se ha desviado hacia la derecha una distancia s_0 y se ha soltado sin velocidad inicial. Hallar su elongación y velocidad en un instante t.

Solución. En este caso $R = s_0$, $\varphi_0 = 0$, y las fórmulas (35) dan

$$s = s_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

$$v = -\sqrt{\frac{g}{l}}\,s_0\,\text{sen}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Ejemplo 8. En el instante inicial el péndulo se encontraba en la posición de equilibrio Q y fue sacado de ella por un empujón que le transmitió una velocidad inicial v_0 dirigida hacia la derecha (es decir, una velocidad positiva). Hallar su elongación y velocidad en un instante t.

Solución. En este caso, partiendo de las fórmulas (33) y (34), hallamos que $R = \sqrt{\frac{l}{g}}\,v_0$, $\varphi_0 = \frac{\pi}{2}$, y las fórmulas (35) dan:

$$s = \sqrt{\frac{l}{g}}\,v_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - \frac{\pi}{2}\right) = \sqrt{\frac{l}{g}}\,v_0\,\text{sen}\sqrt{\frac{g}{l}}\,t,$$

$$v = -v_0\,\text{sen}\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t - \frac{\pi}{2}\right) = v_0 \cos\sqrt{\frac{g}{l}}\,t.$$

Ejemplo 9. Hallar las derivadas de las funciones sen ωt y cos ωt.

Como v es la derivada de s respecto del tiempo t, comparando los valores de s y v en el ejemplo 8 llegamos a la conclusión de que

$$\frac{d}{dt}\left(\sqrt{\frac{l}{g}}\, v_0 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right) = v_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

Análogamente, partiendo del ejemplo 7, hallamos

$$\frac{d}{dt}\left(a_0 \cos \sqrt{\frac{g}{l}}\, t\right) = -\sqrt{\frac{g}{l}}\, s_0 \operatorname{sen} \sqrt{\frac{g}{l}}\, t.$$

En particular, suponiendo $v_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$, $s_0 = 1$ y designando $\sqrt{\frac{g}{l}}$ por ω, obtenemos de estas fórmulas que

$$\frac{d}{dt} \operatorname{sen} \omega t = \omega \cos \omega t \quad \text{y} \quad \frac{d}{dt} \cos \omega t = -\omega \operatorname{sen} \omega t. \tag{36}$$

Ejemplo 10. Como tanto el coseno como el seno son funciones periódicas, al cabo de cierto intervalo de tiempo T, llamado *período de oscilación*, el péndulo volverá otra vez a la posición inicial y repetirá el mismo movimiento. Hallar el período de oscilación del péndulo.

Solución. La variación del argumento en 2π no cambia el valor del seno y del coseno. Por lo tanto, el período de oscilación del péndulo será el intervalo de tiempo T al cabo del cual la expresión que figura en las igualdades (35) detrás de los signos seno y coseno aumenta en 2π. En otras palabras, los valores de la expresión $\sqrt{\frac{g}{l}}\, t - \varphi_0$ en los instantes t y $t + T$ deberán diferir uno de otro en 2π:

$$\sqrt{\frac{g}{l}}\,(t+T) - \varphi_0 = \left(\sqrt{\frac{g}{l}}\, t - \varphi_0\right) + 2\pi.$$

De esta expresión hallamos sin dificultad T:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}. \tag{37}$$

De este modo, el movimiento se repite periódicamente al cabo de T segundos. El péndulo efectúa *oscilaciones periódicas*. Durante cada período (es decir, cada intervalo de tiempo igual a T) el péndulo, como se deduce de (35), llega una vez a su posición extrema derecha (el coseno se hace

igual a +1) y una vez a la extrema izquierda (donde el coseno es igual a —1). En estos instantes de elongación máxima del péndulo su velocidad es nula [véase (35); cuando el coseno toma los valores ± 1, el seno del mismo argumento se anula]. La velocidad máxima (el seno toma los valores ± 1) la tiene el péndulo cuando pasa por el punto Q (donde el seno se anula).

ECUACION DIFERENCIAL DE LAS OSCILACIONES ARMONICAS

Hemos deducido las fórmulas que determinan el movimiento del péndulo partiendo de la ecuación (30) o, lo que es lo mismo, de la ecuación diferencial (31). Pero existe otra ecuación diferencial que también describe el movimiento del péndulo que hemos estudiado. Su deducción es muy simple.

Supongamos que el cuerpo M se encuentra en cierto instante en un punto A de la circunferencia que recorre. La gravedad (que consideraremos igual a mg y que actúa verticalmente hacia abajo) la descomponemos, aplicando la regla del paralelogramo, en dos fuerzas: una tangente a la circunferencia en el punto A y otra perpendicular a la tangente en dicho punto. Esta última componente tiende a alargar el hilo y se equilibra con su fuerza de tensión (ya que hemos supuesto que dicho hilo es inextensible). En cambio, la fuerza F, que actúa según la tangente, es igual en magnitud, como puede verse fácilmente, a mg sen α y está dirigida hacia el punto Q (fig. 10), es decir, cuando α es positivo la fuerza F es negativa y viceversa. Por lo tanto,

$$F = -mg \operatorname{sen} \alpha.$$

Si se prescinde de las fuerzas equilibradas entre sí, es decir, de la tensión del hilo y de la componente de la gravedad perpendicular a la tangente, F será la única fuerza que actúa sobre el cuerpo M (despreciamos la fuerza de resistencia del aire) y, por lo tanto, podemos escribir basándonos en la segunda ley de Newton que

$$ma = -mg \operatorname{sen} \alpha,$$

o bien

$$a = -g \text{ sen } \alpha.$$

Recordamos ahora que sólo nos interesan las *oscilaciones pequeñas* del péndulo, en virtud de lo cual sen α puede sustituirse (aproximadamente) por α y escribir esta ecuación en la forma

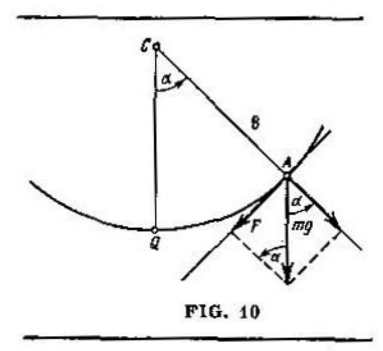


FIG. 10

$$a = -g\alpha,$$

o, de acuerdo con (28),

$$a + \frac{g}{l} s = 0. \tag{38}$$

Esta es la ecuación que necesitábamos. Ahora veamos cómo se puede escribir en forma de *ecuación diferencial*. De las relaciones $a = \frac{dv}{dt}$ y $v = \frac{ds}{dt}$ se deduce que si tomamos una vez la derivada del camino recorrido s y luego tomamos la derivada de la magnitud obtenida (es decir, de la velocidad), obtenemos la aceleración. Dicho de otro modo, la aceleración es *la segunda derivada* del camino recorrido s (respecto del tiempo t). Esto se escribe de la forma siguiente:

$$a = \frac{d}{dt}\left(\frac{ds}{dt}\right),$$

ó

$$a = \frac{d^2s}{dt^2}. \tag{39}$$

El símbolo $\frac{d^2s}{dt^2}$ (segunda derivada de s respecto de t) no se considera como una expresión algebraica, sino como un signo único; en él no se puede hacer ninguna operación (en particular, simplificar este «quebrado»). De (39) se deduce que la ecuación (38) puede escribirse en forma de ecuación diferencial del modo siguiente:

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\frac{g}{l}s=0. \qquad (40)$$

Advertimos que *ya sabemos resolver* esta ecuación. En efecto, con ella se define la ley de variación de la magnitud s, es decir, la ley de las oscilaciones del péndulo, y el movimiento del péndulo ya ha sido estudiado. Por esto podemos decir inmediatamente que la solución de la ecuación (40) viene dada por la primera fórmula (35). De un modo más completo expresaremos esto de la forma siguiente. *La ecuación diferencial* (40) *tiene la solución*

$$s=R\cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}}\,t-\varphi_0\right),$$

donde R *y* φ_0 *se determinan por las fórmulas* (33) y (34). Advertimos que para hallar los valores de R y φ_0 debemos conocer la elongación inicial s_0 y la velocidad inicial v_0, es decir, los valores de las magnitudes s y $\frac{ds}{dt}$ en el instante inicial.

Designando $\sqrt{\frac{g}{l}}$ por ω podemos formular la afirmación expuesta de la forma siguiente.

Teorema. *La ecuación diferencial*

$$\frac{d^2s}{dt^2}+\omega^2s=0 \qquad (41)$$

tiene la solución

$$s=R\cos(\omega t-\varphi_0), \qquad (42)$$

donde R *y* φ_0 *dependen de los valores de las magnitudes* s *y* $\frac{ds}{dt}$ *en el instante inicial.*

La ecuación (41) se llama *ecuación de las oscilaciones armónicas.* De toda magnitud descrita por una ecuación de este

tipo se dice que efectúa oscilaciones armónicas; esto significa que la magnitud considerada varía con el tiempo según la ley (42). La magnitud ω que figura en la ecuación diferencial (41) y en su solución (42) se llama *frecuencia de las oscilaciones*, y $T = \frac{2\pi}{\omega}$, *período de las oscilaciones*. Si una magnitud s efectúa oscilaciones armónicas, al cabo de cada T segundos sus valores vuelven a repetirse (véase el ejemplo 10).

Comparemos las ecuaciones diferenciales (23) y (41). En la ecuación (23) figura únicamente la primera derivada, por esto se llama *ecuación de primer orden*. La ecuación (41) es *una ecuación diferencial de segundo orden*, puesto que en ella figura la segunda derivada. Llamamos la atención sobre el hecho de que para resolver la ecuación de primer orden (23) sólo había que conocer el valor de la propia magnitud v en el instante inicial. En cambio, para resolver la ecuación de segundo orden (41) es preciso conocer el valor en el instante inicial no sólo de la propia magnitud s, sino también el de su derivada $\frac{ds}{dt}$. Resumiendo, para resolver una ecuación diferencial de primer orden hay que conocer el valor inicial de una magnitud, y para resolver una ecuación diferencial de segundo orden, los valores iniciales de dos magnitudes.

Advertimos que la solución de la ecuación (40) la obtuvimos partiendo de razonamientos físicos: ambas ecuaciones, (31) y (40), describen el mismo fenómeno físico y, por lo tanto, deben tener una misma solución, que expresa la ley del movimiento del péndulo. Como es natural, este razonamiento no es más que una suposición, y no una demostración matemática rigurosa. Pero se puede demostrar de un modo puramente matemático que las ecuaciones (31) y (40) son equivalentes, es decir, que poseen una misma solución: derivando los dos miembros de la ecuación (31) obtenemos la ecuación (40). Y viceversa, de la ecuación (40) se puede obtener la (31), pero para esto hay que recurrir a la operación inversa de la derivación. Esta operación (llamada *integración*) constituye junto con la derivación la base de todas las matemáticas superiores. Dar una explicación más detallada dentro del marco de este pequeño libro sería muy difícil.

Sin embargo, utilizando las fórmulas (36) el lector puede hallar con facilidad la segunda derivada de la función (42) y convencerse de que esta función satisface la ecuación (41).

Veamos dos ejemplos tomados de la física que conducen a la ecuación de las oscilaciones armónicas.

CIRCUITO OSCILANTE

Consideremos un circuito oscilante, es decir, un circuito eléctrico cerrado formado por una bobina y un condensador. La bobina posee cierta *inductancia* (véase la pág. 32) y cierta *resistencia*. Todo el circuito se puede representar en

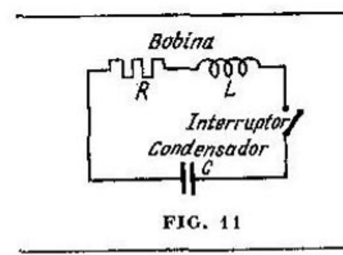


FIG. 11

forma del siguiente esquema (fig. 11). Llamemos q a la cantidad de electricidad que pasa de una placa del condensador a la otra, e i a la intensidad de la corriente en el circuito. (Suponemos que inicialmente el condensador tenía cierta carga q_0 y que por la bobina pasaba cierta corriente i_0; nos interesa conocer cómo variarán después estas magnitudes). En este caso la caída de tensión en el condensador es igual a $\frac{q}{C}$, donde C es su capacidad; la caída de tensión en la bobina es igual a $Lw + Ri$, siendo R la resistencia y L, la inductancia (véase (25)). Según la segunda ley de Kirchhoff, la suma de las caídas de tensión a lo largo de un circuito es igual a cero, es decir,

$$Lw + Ri + \frac{q}{C} = 0. \tag{43}$$

La magnitud i es la derivada de q respecto de t. Efectivamente, si la cantidad de electricidad q tuviera en los instantes t y $t + h$ los valores q_t y q_{t+h}, en este intervalo de tiempo pasaría por la sección transversal del hilo conductor (en cualquier parte del circuito) una cantidad de electri-

cidad igual a $q_{t+h} - q_t$. Por lo tanto, la intensidad media de la corriente durante el intervalo de tiempo comprendido entre t y $t + h$ sería igual a

$$i_m = \frac{q_{t+h} - q_t}{h}.$$

De aquí, pasando al límite, obtenemos

$$i = \lim_{h \to 0} \frac{q_{t+h} - q_t}{h} = \frac{dq}{dt}.$$

De las relaciones $i = \frac{dq}{dt}$ y $w = \frac{di}{dt}$ se deduce que w es la derivada de $i = \frac{dq}{dt}$, es decir, w es la segunda derivada de q:

$$w = \frac{d^2q}{dt^2}.$$

Así, pues, la relación (43) se puede escribir en la forma:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + R\frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = 0. \qquad (44)$$

Esta ecuación diferencial es más complicada que la (41), ya que en ella, además de la incógnita q y de su segunda derivada $\frac{d^2q}{dt^2}$, figura la primera derivada $\frac{dq}{dt}$. No obstante, no vamos a ocuparnos en resolver la ecuación (44) (véase la nota de la pág. 56), sino que consideraremos solamente el caso en que la resistencia R de la bobina es muy pequeña (comparada con las magnitudes L y C) y podemos por esto despreciar el término $R\frac{dq}{dt}$ en la ecuación (44). Entonces esta ecuación toma la forma:

$$L\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{q}{C} = 0,$$

o bien

$$\frac{d^2q}{dt^2} + \frac{1}{LC}q = 0. \qquad (45)$$

La ecuación (45) es, evidentemente, la ecuación de las oscilaciones armónicas (véase (41)), siendo ω la frecuencia de estas oscilaciones en el circuito considerado

$$\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}},$$

y el período de las oscilaciones viene expresado por la fórmula

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

La solución de la ecuación (45) tiene la forma (véase (42)):

$$q = R\cos\left(\frac{t}{\sqrt{LC}} - \varphi_0\right),$$

donde R y φ_0 dependen de los valores iniciales, es decir, de q_0 y de i_0.

OSCILACIONES POR LA ACCION DE LA FUERZA ELASTICA DE UN RESORTE

Supongamos que de un muelle hay suspendido un peso de masa m. Por la acción de la gravedad el muelle se alarga un poco (hasta que su fuerza de tensión equilibre la de la gravedad); en esta situación el peso y el muelle pueden estar en reposo (hallarse en equilibrio). Pero si sacamos el peso de la posición de equilibrio tirando de él hacia abajo, la fuerza de tensión del muelle será mayor que la de la gravedad y su resultante estará dirigida hacia arriba. Si, por el contrario, trasladamos el peso a un punto que se encuentre más alto que la posición de equilibrio, la resultante está dirigida hacia abajo. Por lo tanto, esta resultante «tiende» a restituir el peso a la posición de equilibrio.

Para simplificar nos limitaremos al caso del movimiento del peso siguiendo una recta vertical: hacia arriba y hacia abajo. Llamemos O a la posición de equilibrio, A, a la posición del peso en cierto instante y s, a la distancia OA. Como sentido positivo en la recta vertical tomaremos el que va desde el punto O hacia abajo, es decir, s se considerará positiva si el peso (punto A) se encuentra más bajo que el punto O, y negativa si está más alto que dicho punto. Las resultantes de las fuerzas de gravedad y tensión del muelle la designaremos por F, y la fuerza de resistencia del aire, por S. Vamos a suponer que sobre el peso no actúan más fuerzas que F y S. De acuerdo con la segunda ley de Newton podemos escribir:

$$ma = F + S,$$

donde a es la aceleración del peso. La fuerza F que tiende a restituir el peso a la posición de equilibrio se hace tanto mayor cuanto más se desvía el peso s de la posición de equilibrio. Aceptamos que la fuerza F es directamente proporcional a la desviación (elongación) s, es decir, igual a la magnitud ks, donde k es un coeficiente de proporcionalidad. Esta suposición concuerda bien con los experimentos (cuando las desviaciones de la posición de equilibrio no son muy grandes). La magnitud k se llama *rigidez del muelle.* Si s es positiva (el punto A se encuentra más bajo que el O), la fuerza F está dirigida hacia arriba, es decir, es negativa; en cambio, si s es negativa, la fuerza F es positiva. En otros términos, la fuerza F tiene signo contrario a la desviación s, es decir,

$$F = -ks.$$

Para la fuerza S tomamos el mismo valor que antes (véase (3)), es decir,

$$S = -bv.$$

De este modo obtenemos la siguiente ecuación del movimiento del peso

$$ma = -ks - bv,$$

o bien

$$ma + bv + ks = 0. \tag{46}$$

Como $v = \frac{ds}{dt}$ y $a = \frac{d^2s}{dt^2}$, esta ecuación se puede escribir en la forma

$$m\frac{d^2s}{dt^2} + b\frac{ds}{dt} + ks = 0. \tag{47}$$

La ecuación (47) es análoga a la (44), que obtuvimos al resolver el problema del circuito oscilante. Aquí no vamos a resolver la ecuación (47) (véase la nota de la página 56), sino que sólo estudiaremos el caso en que se puede despreciar el valor de la fuerza de resistencia del aire (es decir, cuando la magnitud b es muy pequeña comparada con las magnitudes m y k). En este caso la ecuación (47) toma la forma:

$$\frac{d^2s}{dt^2} + \frac{k}{m}s = 0. \tag{48}$$

La relación (48) es la ecuación de las oscilaciones armónicas de frecuencia

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

y período

$$T=2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}.$$

La solución de la ecuación (48), de acuerdo con (42), tiene la forma

$$s=R\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}t-\varphi_0\right), \qquad (49)$$

donde R y φ_0 dependen de las condiciones iniciales, es decir, de s_0 y de v_0.

Observación. Para obtener la ecuación de las oscilaciones armónicas, al estudiar las oscilaciones del péndulo y las del peso colgado del muelle despreciamos las fuerzas de rozamiento y de resistencia del aire, y al considerar el circuito oscilante prescindimos de su resistencia. Esto significa desde el punto de vista físico que, con nuestras suposiciones, no se produce ningún gasto de energía; desde el punto de vista matemático esto se puso de manifiesto en el hecho de que en la ecuación diferencial se eliminó el término que contenía la primera derivada. Como resultado obtuvimos las oscilaciones armónicas, es decir, unas oscilaciones que se repiten durante todo el tiempo, o sea, *no amortiguadas.*

Pero, ¿qué ocurriría si al resolver los problemas antes considerados se tuviera en cuenta la resistencia del aire o la caída de tensión en las resistencias? Por ejemplo, ¿en qué se diferencia la solución de la ecuación (44) de la solución de la (45)? El cálculo matemático (que no haremos aquí) demuestra que la ecuación (44) también describe un proceso oscilatorio si R no es demasiado grande. Sin embargo, las oscilaciones definidas por la ecuación (44) se debilitan con el tiempo; por esta razón se llaman *oscilaciones amortiguadas.* Esto se explica en física por el hecho de que la energía de las oscilaciones disminuye durante todo el tiempo, transformándose en energía calorífica, ya que al pasar la corriente

por la resistencia R se desprende calor. Las oscilaciones del péndulo también se debilitan paulatinamente, o sea, se amortiguan, puesto que debido al rozamiento y a la resistencia del aire la energía del péndulo se gasta poco a poco en calentar el propio péndulo y el aire circundante. Pero si la resistencia no es grande, durante un intervalo de tiempo pequeño (por ejemplo, de varios períodos) las oscilaciones amortiguadas difieren poco de las no amortiguadas (armónicas). La amortiguación se pone de manifiesto al cabo de un intervalo de tiempo suficientemente grande. Si, por ejemplo, un cuerpo muy pesado se cuelga de una cuerda y se desvía levemente de su posición de equilibrio, al cabo de 10—15 períodos la disminución de la amplitud de las oscilaciones será insignificante e inapreciable a nuestra vista.

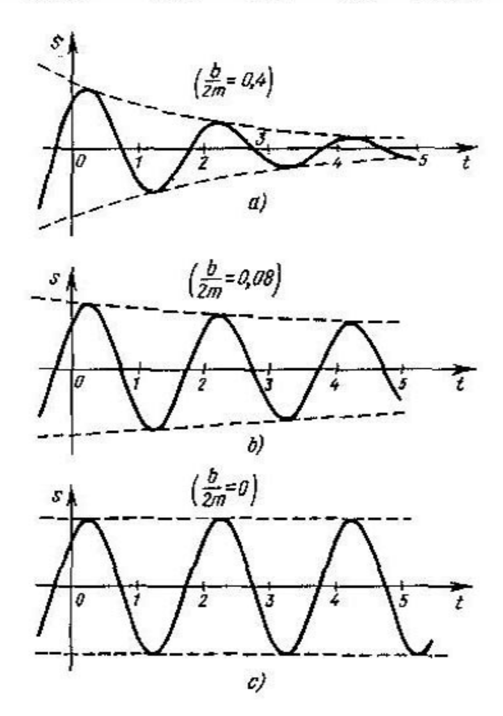


FIG. 12

Sólo podremos obrservarla varios minutos después de comenzar las oscilaciones.

Para hacer la comparación vamos a dar (sin deducirla) la solución exacta de la ecuación (47). Consideraremos que el valor del coeficiente b en la expresión de la fuerza de resistencia del aire no es muy grande (concretamente, $b < 2\sqrt{mk}$). Entonces la solución de la ecuación (47) tiene la forma:

$$s = Re^{-\frac{b}{2m}t} \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \left(\frac{b}{2m}\right)^2}\, t - \varphi_0\right), \qquad (50)$$

donde R y φ_0 se determinan por las condiciones iniciales. De esta fórmula se deduce que s disminuye ilimitadamente con el tiempo (el factor $e^{-\frac{b}{2m}t}$ se hace cada vez menor al aumentar t). En la fig. 12, a y b se dan las gráficas de las funciones (50) para distintos valores del coeficiente $\frac{b}{2m}$. Cuanto menor es $\frac{b}{2m}$ tanto más lentamente se produce la amortiguación de las oscilaciones. Compárense estos dibujos con la gráfica de las oscilaciones armónicas (49) que se da en la fig. 12,c (la fórmula (50) coincide con la (49) cuando $\frac{b}{2m} = 0$).

Advertimos, además, que si los valores del coeficiente b son grandes (cuando $b > 2\sqrt{mk}$) la fórmula (50) se sustituye por otra. En este caso el cuerpo no pasará por la posición de equilibrio más que una vez, y después se acercará lentamente a esta posición, pero hallándose todo el tiempo más alto o más bajo que ella.

OTRAS APLICACIONES DEL CONCEPTO DE DERIVADA

VALORES MAXIMO Y MINIMO

Consideremos una magnitud variable y cuyo valor dependa de otra magnitud x. Cuando se dice que y depende de x o que y es *función* de x, se entiende por esto que a cada valor de x corresponde un valor completamente determinado de y. Por ejemplo, el área de un círculo es función de su radio, es decir, el área del círculo depende de la magnitud del radio. El seno, el coseno, la tangente, etc., dependen de la magnitud del ángulo, o sea, son funciones del ángulo; estas funciones se llaman trigonométricas.

Así, pues, sea y una función de la magnitud x. Se nos plantea el problema siguiente: hallar el valor de x para el cual y toma su *valor máximo*. Antes de resolver este problema introduciremos el importante concepto de *campo de definición* (o *de existencia*) *de la función*. Estudiaremos este concepto en unos ejemplos.

Como primer ejemplo tomaremos la función siguiente. Sea V el volumen de un kilogramo de agua a presión atmosférica normal y a la temperatura de t° (escala centígrada). En este caso V depende de t, es decir, V es función de la magnitud t. Es evidente que esta función viene dada únicamente para los valores de t comprendidos entre 0 y 100°. Porque a presión atmosférica normal el agua no puede tener una temperatura $t < 0^\circ$ (puesto que se transforma en hielo) o $t > 100^\circ$ (ya que se convierte en vapor). Por lo tanto, la función V se considera determinada solamente para los valores de t que satisfacen las desigualdades $t \geqslant 0$ y $t \leqslant 100$. De ordinario estas dos desigualdades se escriben juntas: $0 \leqslant t \leqslant 100$. Quedamos, pues, en que la función V está determinada solamente cuando

$$0 \leqslant t \leqslant 100.$$

En otras palabras, *el campo de existencia* de la función V está constituido por los números que satisfacen la condición $0 \leqslant t \leqslant 100$. Este campo de existencia se llama *segmento numérico*, porque cuando se representan los números sobre

un eje numérico, todos los puntos que corresponden a los números que satisfacen la condición $0 \leqslant t \leqslant 100$ llenan todo un segmento de dicho eje. Los números 0 y 100 se llaman *extremos* o *puntos extremos* del segmento numérico $0 \leqslant t \leqslant \leqslant 100$, y todos los demás números de este segmento se llaman *valores interiores* del mismo o *puntos interiores. Todo valor interior t_0 posee la propiedad de que en el segmento numérico existen números menores que t_0 y números mayores que t_0*. Los extremos del segmento no poseen esta propiedad.

Como segundo ejemplo consideraremos la intensidad de la corriente i que pasa por un circuito eléctrico (representado esquemáticamente en la fig. 3) al cabo de t segundos de haberlo cerrado. En este caso i es función del tiempo t. La fórmula que se dio en la página 33 muestra cómo i depende de t. ¿Para qué valores de t existe la función i? Es evidente que hasta el instante de cerrar el circuito, es decir, cuando $t < 0$, no se observa en él ninguna corriente y, por lo tanto, sólo tiene sentido considerar la corriente i cuando $t \geqslant 0$. De este modo el *campo de existencia* de la función i estará constituido por todos los números t que satisfacen la condición $t \geqslant 0$. Este campo de existencia (que se puede llamar *semirrecta numérica*) tiene un punto extremo $t = 0$; todos los demás puntos son interiores.

Finalmente, como tercer ejemplo, estudiaremos la función $y = \operatorname{sen} x$. Esta función está definida cualquiera que sea el valor de x, es decir, *el campo de existencia* de esta función es *toda la recta numérica.* Este campo de existencia carece de puntos extremos.

Existen funciones cuyo campo de existencia es muy complicado, pero nosotros examinaremos solamente aquellas funciones para las cuales sirve de campo de definición un segmento numérico, una semirrecta o un eje numérico.

Volvamos a ocuparnos ahora del problema que teníamos planteado, es decir, de hallar el valor máximo de una función. ¿Puede una función tomar su valor máximo en un punto extremo de su campo de existencia? Sí, naturalmente. Como ejemplo utilizaremos la función V, considerada anteriormente, que expresa el volumen de un kilogramo de agua a presión normal y temperatura $t°$. Como el volumen del agua aumenta al calentarse, está claro que la función V tendrá su valor máximo cuando $t = 100°$, es decir, en el punto extremo de su campo de definición.

La operación de derivación permite en muchos casos resolver rápidamente el problema de hallar el valor máximo de una función. Precisamente se cumple la siguiente proposición.

Supongamos que y es función de la variable x. Si esta función toma el valor máximo en un punto interior $x = a$ de su campo de existencia, en este punto la derivada $\frac{dy}{dx}$ se anula.*

Demostremos esta proposición. El valor de y correspondiente al valor x (tomado del campo de existencia de la función) lo designaremos por y_x. Hemos supuesto que el valor y_a, que toma la función y cuando $x = a$, es el valor máximo, es decir,

$$y_a \geqslant y_x \tag{51}$$

para cualquier x (tomada del campo de existencia de la función). La derivada $\frac{dy}{dx}$ viene determinada, cuando $x = a$, por la relación

$$\left.\frac{dy}{dx}\right|_{\text{cuando } x=a} = \lim_{h\to 0} \frac{y_{a+h} - y_a}{h}. \tag{52}$$

Demostremos que esta derivada es igual a cero.

Primeramente vamos a aproximar h a cero dándole valores *positivos*. Como el numerador $y_{a+h} - y_a$ de la función que figura detrás del signo de límite satisface la desigualdad $y_{a+h} - y_a \leqslant 0$ (véase (51)) y $h > 0$, dicha fracción, en su totalidad, no será positiva (es decir, será nula o un número negativo). Pero entonces tampoco podrá ser positivo el límite de esta fracción, es decir, *la derivada* (52) *no puede ser un número positivo.*

Procedamos ahora a proximar h a cero dándole valores *negativos*. En este caso, lo mismo que antes, $y_{a+h} - y_a \leqslant 0$ (véase (51)), pero $h < 0$ y, por lo tanto, la fracción que hay detrás del signo de límite no será negativa. Pero entonces *tampoco puede ser negativo* el límite de dicha fracción (es decir, la derivada que nos interesa).

De esta forma, el valor de la derivada $\frac{dy}{dx}$, cuando $x = a$, no puede ser positivo ni negativo, por lo tanto, tiene que ser igual a cero, que es lo que se quería demostrar.

---

*) Si dicha derivada existe. Hay funciones que no tienen derivada.

En esta demostración se ha aprovechado esencialmente el hecho de que a es un punto *interior* del campo de existencia de la función. En efecto, hemos dado a la magnitud h valores positivos y negativos, de manera que $a+h$ tomaba valores mayores que a y valores menores que a.

Supongamos ahora que a es un punto extremo. En este caso en el campo de determinación sólo existen valores mayores que a o valores menores que a, es decir, la demostración anterior es inaplicable.

Cuando el problema que se plantea es el de hallar *el valor mínimo* (y no el máximo) de una función, se pueden hacer razonamientos totalmente análogos. Como resultado demostramos que si la función toma el valor mínimo en un punto interior de su campo de existencia, en este punto también se anula la derivada de la función. Unificando los casos de los valores máximo y mínimo se obtiene el siguiente teorema, debido a Fermat*.

Teorema. *Si una función toma el valor máximo (o mínimo) en un punto interior de su campo de existencia, en este punto la derivada de la función se anula.*

En este teorema se basa la determinación de los valores máximos y mínimos por medio de la derivación. Tenemos, pues, que hallar la derivada de la función que se considera y aquellos valores interiores del campo de determinación en los cuales dicha derivada se anula. El punto donde la función toma el valor máximo (o mínimo) debe buscarse entre estos puntos (en los cuales la derivada se hace igual a cero) o entre los puntos extremos del campo de existencia.

Ejemplo 11. A los extremos de un conductor (por ejemplo de un aparato de calefacción) está conectada una batería cuya fuerza electromotriz es E y su resistencia, r. ¿Qué resistencia debe tener el conductor para que reciba de la batería la potencia máxima?

Solución. Llamemos R a la resistencia del conductor. Entonces la resistencia total del circuito será igual a $R+r$ y, por lo tanto, la intensidad de la corriente que pasa por él tendrá el valor

$$i=\frac{E}{R+r}.$$

*) Matemático francés del siglo XVII.

La potencia que cede la batería al conductor viene expresada por la fórmula $W = i^2R$, es decir,

$$W = \frac{E^2R}{(R+r)^2}. \tag{53}$$

Por consiguiente, el problema se puede plantear así: ¿con qué valor de R toma la función W, definida por la fórmula (53), el valor máximo?

De campo de existencia de la función W sirve la semirrecta $R \geqslant 0$ (ya que la resistencia del conductor no puede ser negativa). Hallemos la derivada $\frac{dW}{dR}$:

$$\frac{dW}{dR} = \lim_{h \to 0} \frac{\frac{E^2(R+h)}{(R+h+r)^2} - \frac{E^2R}{(R+r)^2}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{E^2[(R+h)(R+r)^2 - R(R+h+r)^2]}{h(R+h+r)^2(R+r)^2} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{r^2 - R^2 - Rh}{(R+h+r)^2(R+r)^2} = \frac{r^2 - R^2}{(R+r)^4} = \frac{r-R}{(R+r)^3}.$$

Para que la derivada $\frac{dW}{dR}$, es decir, la fracción

$$\frac{r-R}{(r+R)^3}$$

se anule es necesario que su numerador $r - R$ sea igual a cero, o sea, que $R = r$.

Así, pues, la potencia W puede tomar su valor máximo cuando $R = r$ o en el punto extremo $R = 0$ del campo de existencia. Pero si $R = 0$ la potencia W también será igual a cero (este valor será el mínimo, y no el máximo). Por lo tanto, la potencia sólo puede tener su valor máximo cuando $R = r$, es decir, cuando se cumple la condición de que *la resistencia del conductor es igual a la resistencia interna de la batería.*

¿Será efectivamente máximo el valor de la potencia cuando $R = r$? Cabe hacerse esta pregunta, porque hemos demostrado solamente que cuando $R = r$ la potencia *puede* tomar su valor máximo, pero esto no significa aún que sea así en efecto.

No es difícil convencerse de que cuando $R = r$ la potencia W toma en realidad su valor máximo. En efecto, si

$R = 0$, la potencia W también será igual a cero, y si R es muy grande, la intensidad de la corriente i será muy pequeña y, por consiguiente, la potencia será pequeña (puesto que la caída de tensión en los extremos del conductor no puede ser mayor que E). Por esto está claro que la potencia deberá alcanzar su valor máximo para cierto valor de R no muy grande. Pero como la potencia *debe* tomar el valor máximo (y *puede* tomarlo *únicamente* cuando $R = r$), está claro que si $R = r$ obtendremos en efecto el valor máximo de la potencia.

Ejemplo 12. Hay que hacer una caldera de vapor de forma cilíndrica y volumen V dado. Conviene que la superficie total de esta caldera sea mínima (si se cumple esta condición la cantidad de metal que se gaste en su construcción será la menor posible; además, cuanto menor sea la superficie de la caldera, menos se enfriará ésta por contacto con el aire circundante). Hallar las dimensiones óptimas de la caldera.

Solución. Llamemos R al radio de la base del cilindro y h a su altura. Entonces

$$V = \pi R^2 h,$$

es decir,

$$h = \frac{V}{\pi R^2}.$$

La superficie del cilindro tiene el valor $S = 2\pi R^2 + 2\pi Rh$, es decir,

$$S = 2\pi R^2 + \frac{2V}{R}. \qquad (54)$$

Tenemos que determinar con qué valor de R tomará la magnitud S (que depende de R, o sea, que es función del radio R) el valor mínimo. Hallamos la derivada $\frac{dS}{dR}$:

$$\frac{dS}{dR} = \lim_{h \to 0} \frac{\left[2\pi (R+h)^2 + \frac{2V}{R+h}\right] - \left[2\pi R^2 + \frac{2V}{R}\right]}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2\pi (2Rh + h^2) - \frac{2Vh}{R(R+h)}}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \left[4\pi R + 2\pi h - \frac{2V}{R(R+h)}\right] = 4\pi R - \frac{2V}{R^2}$$

Igualando a cero la derivada $\frac{dS}{dR}$ hallamos que $R = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$ y, por lo tanto,

$$h = \frac{V}{\pi R^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}} = 2\sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}} = 2R.$$

En otras palabras, *la altura del cilindro debe ser igual a su diámetro.*

¿Hemos obtenido en realidad el valor mínimo posible de la superficie del cilindro? De que esto es así no es difícil convencerse. En efecto, si los valores de R son muy grandes, la superficie S también lo será (ya que será grande el valor del primer término de la expresión de S (véase (54)). Cuando los valores de R sean pequeños, la magnitud de la superficie S también será muy grande (porque será grande el segundo término). Por consiguiente, para cierto valor (ni muy grande ni muy pequeño) de R la magnitud S deberá tener su valor mínimo. Pero como la derivada $\frac{dS}{dR}$ sólo se anula para un valor de R, a este valor de R corresponderá el área mínima de la superficie del cilindro.

Nos limitamos a poner estos dos ejemplos. Si el lector lo desea puede encontrar muchos problemas de este tipo en los libros de texto o de problemas. La solución de algunos de estos problemas puede recomendarse con la condición de que no se prescinda de la parte final de los razonamientos que hemos hecho, es decir, de la demostración de que en el punto hallado existe efectivamente el valor máximo o mínimo que se busca. En los cursos de matemáticas superiores se estudian procedimientos más perfectos que permiten determinar si en el punto hallado toma efectivamente la función el valor máximo o mínimo. Además existen *reglas para el cálculo de las derivadas.* Como el autor no suponía que el lector conoce estas reglas, en los ejemplos puestos anteriormente las derivadas se hallan por cálculos directos.

EL PROBLEMA DEL TRAZADO DE LA TANGENTE

Sea L cierta línea curva y M_0 un punto de ella. Consideremos el problema de trazar *la tangente* a la curva L por el punto M_0. Ante todo diremos unas palabras sobre cómo

se define en matemáticas la tangente. Elijamos un punto M, que se encuentre también en la curva L, y tracemos la recta M_0M, que llamaremos *secante*, puesto que corta a la curva L por lo menos en los dos puntos M_0 y M. Si el punto M se mueve por la curva L aproximándose al M_0 (en la fig. 13 se señalan las posiciones sucesivas M, M', M'', . . . del punto M), la secante M_0M girará alrededor del punto M_0. Si al tender el punto M al M_0 la secante M_0M, girando;

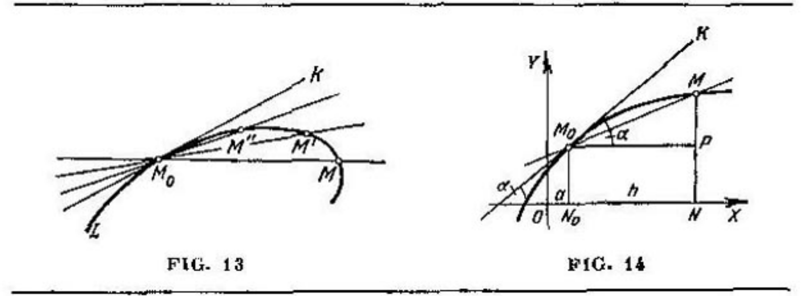


FIG. 13 FIG. 14

tiende a cierta recta M_0K, esta recta límite M_0K se llama *tangente* a la curva L en el punto M_0.

Supongamos ahora que la curva L se ha dibujado en un plano, en el cual existe un sistema de coordenadas dado, de manera que a cada punto M de la curva L corresponden una abscisa x y una ordenada y. Designemos la abscisa del punto M_0 por a (fig. 14) y la longitud del segmento N_0N por h. Entonces la abscisa del punto M será igual a $a + h$. La ordenada del punto M_0 la designaremos por y_a, y la del punto M, por y_{a+h}. El segmento MP tendrá la longitud

$$MP = MN - PN = MN - M_0N_0 = y_{a+h} - y_a,$$

y, por lo tanto, tendremos que

$$\operatorname{tg} \angle PM_0M = \frac{MP}{M_0P} = \frac{MP}{N_0N} = \frac{y_{a+h} - y_a}{h}. \qquad (55)$$

Llamemos α al ángulo PM_0K, es decir, al ángulo comprendido entre el eje de abscisas y la tangente. En este caso, al aproximarse el punto M al M_0, o sea, al tender a cero el segmento $N_0N = h$, el ángulo PM_0M se aproximará a α, y la tangente del ángulo PM_0M se aproximará a $\operatorname{tg}\alpha$.

De esta forma, de la ecuación (55), en el límite (cuando $h \to 0$), obtenemos:

$$\operatorname{tg} \alpha = \lim_{h \to 0} \frac{y_{a+h} - y_a}{h} = \frac{dy}{dx}\bigg|_{\text{cuando } x=a}.$$

Por lo tanto, *la tangente del ángulo de inclinación de la tangente a la curva es igual al valor de la derivada de la ordenada y respecto de la abscisa x cuando x = a, siendo a la abscisa del punto de contacto.*

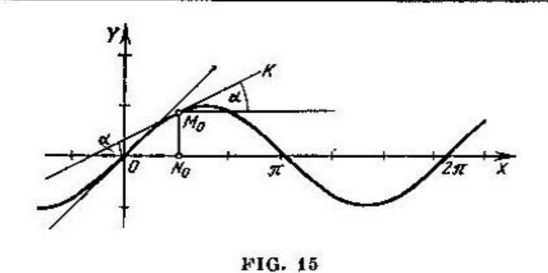


FIG. 15

Ejemplo 13. Consideremos una sinusoide (fig. 15), es decir, una curva entre cuyas abscisa y ordenada existe la relación

$$y = \operatorname{sen} x.$$

¿Cómo se puede trazar la tangente a esta curva en un determinado punto M_0 cuya abscisa es a?

Ya sabemos cómo se halla la tangente del ángulo de inclinación de esta recta:

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{dy}{dx}\bigg|_{\text{cuando } x=a} = \frac{d}{dx} \operatorname{sen} x \bigg|_{\text{cuando } x=a} = \cos a$$

(véase (36)). Por lo tanto, para trazar la tangente debemos hallar el $\cos a$ (lo que es muy fácil, puesto que conocemos el segmento $M_0N_0 = y = \operatorname{sen} a$) y trazar la recta M_0K de manera que $\operatorname{tg} \alpha = \cos a$. Por ejemplo, si $a = 0$, obtenemos que $\operatorname{tg} \alpha = \cos 0 = 1$, es decir, *la tangente a la sinusoide en el origen de coordenadas forma con el eje de abscisas un ángulo* $\frac{\pi}{4}$. Si $a = \frac{\pi}{3}$ tenemos que $\operatorname{tg} \alpha = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}$,

lel
co
lia

CONCLUSIÓN

Los conceptos de derivada y de ecuación diferencial hallan aplicaciones extraordinariamente amplias en matemáticas, física, astronomía y técnica. Del estudio de las propiedades y de la aplicación de estos conceptos se ocupan las llamadas «matemáticas superiores». Aunque es de lamentar, en el marco de este pequeño libro hubiera sido muy difícil explicar las ideas que sirven de fundamento a la definición de la operación llamada *integración**, la cual es en cierto sentido la operación inversa de la derivación y junto con ella sirve de base a las matemáticas superiores.

Conviene llamar la atención del lector sobre el hecho de que los conceptos de las matemáticas superiores, y en particular el de derivada, a que hemos consagrado este libro, no están al margen de la vida, sino que son *el reflejo matemático de los procesos que tienen lugar en la naturaleza* (en particular, de la velocidad del movimiento mecánico). Estos conceptos se desarrollaron históricamente a partir de aquellos problemas que la vida planteó, en primer lugar, de las necesidades de *la mecánica* (problema de la determinación de la velocidad de un movimiento) y de *la geometría* (problema del trazado de la tangente). F. Engels escribía: «Como las demás ciencias, las matemáticas surgieron de las necesidades del hombre». Este criterio también se refiere totalmente a las matemáticas superiores. El concepto de derivada, creado con motivo del estudio del *movimiento* de los cuerpos y de la *variación* de las magnitudes, refleja de por sí este movimiento, puesto que se refiere a *una magnitud variable*. «El punto de viraje en las matemáticas fue la magnitud variable cartesiana. Gracias a esto entraron en las matemáticas *el movimiento* y *la dialéctica*, y gracias a esto mismo *se hizo inmediatamente necesario el cálculo diferencial e integral*, cuyos rudimentos pronto fueron sentados y que en conjunto fue concluido, pero no descubierto, por Newton y Leibniz» (Engels).

Así, pues, los conceptos de las matemáticas superiores surgieron de las necesidades del hombre y, en primer lugar,

---

*) Véase el libro de I. P. Natansón, «Suma de magnitudes infinitesimales».

con motivo del estudio del movimiento mecánico de los cuerpos. Pero en la naturaleza existe no sólo la forma mecánica del movimiento. Los investigadores descubren continuamente nuevas leyes de la física y ante los matemáticos se plantean los problemas de describir los fenómenos y las formas de movimiento recién descubriertas. Las teorías físicas creadas últimamente (teoría de la relatividad, física cuántica, teoría del núcleo) exigen el desarrollo de un nuevo formalismo matemático. Algunas ciencias matemáticas han nacido durante los últimos decenios. *Las matemáticas no son una ciencia al margen de la vida, sino una ciencia ligada a la vida que se desarrolla a la par que nuestros conocimientos del mundo físico.*

A NUESTROS LECTORES:

«Mir» edita libros soviéticos traducidos al español, inglés, francés y árabe. Entre ellos figuran las mejores obras de distintas ramas de la ciencia y la técnica: manuales para los centros de enseñanza superior y escuelas tecnológicas; literatura sobre ciencias naturales y médicas. También se incluyen monografías, libros de divulgación científica y ciencia ficción. Dirijan sus opiniones a la Editorial «Mir», I Rizhski per., 2, 129820, Moscú, I—110, GSP, URSS.

Lecciones populares de matemáticas

Obras de nuestro sello editorial

A.I. Kostovski
Construcciones geométricas mediante un compás
A.O. Guelfond
Resolución de ecuaciones en números enteros
A.S. Smogorzhevski
Acerca de la geometría de Lobachevski
G.E. Shílov
Análisis matemático en el campo de funciones racionales
A.I. Markushévich
Curvas maravillosas
Números complejos y representaciones conformes
Funciones maravillosas

Editorial MIR Moscú